THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 9

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (facile) Soit G un groupe et fixons un nombre premier p. Montrez que G possède un unique p-sous-groupe de Sylow si et seulement si tous (et donc le seul) de ses p-sous-groupes de Sylow sont normaux.

Exercise 3. (facile) Soient $p \neq q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe fini d'ordre $p^n q^m$. Supposons que G possède un unique p-sous-groupe de Sylow P, ainsi qu'un unique q-sous-groupe de Sylow Q. Montrez que nous avons un isomorphisme de groupes $G \cong P \times Q$.

Exercise 4. (moyen) Trouvez tous les 2-sous-groupes de Sylow de A_5.

Exercise 5. (moyen) Soit G un groupe fini et p un nombre premier. Soit s un entier positif tel que $p^s \mid |G|$. Montrez que G possède un sous-groupe d'ordre p^s.

Exercise 6. (moyen) *Tout p-sous-groupe est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow.*

(1) Soit G un groupe fini et soit $H \subseteq G$ un sous-groupe d'ordre p^k pour un nombre premier p et $k > 0$. Montrez que H est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow de G.
Indice : Essayez d'utiliser l'idée de la preuve du deuxième théorème de Sylow dans les notes de cours.

(2) Supposons de plus que H soit un sous-groupe normal de G d'ordre p^k. Montrez que H est contenu dans tous les p-sous-groupes de Sylow de G.

Exercise 7. (moyen) Soit K un sous-groupe normal d'un groupe fini G et soit P un p-sous-groupe de Sylow de K. Montrez que G est engendré par K et $N_G(P)$.

Définition : Soit G un groupe et p un nombre premier. Considérons l'action φ du groupe cyclique d'ordre p sur $G^p := G \times \ldots \times G$, où ce produit contient p copies de G, donnée par :

$$\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(G^p)$$

$$\varphi([1]) = T$$

$$T(g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_p, g_1, \ldots, g_{p-1})$$

Le produit en couronne $G \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est défini comme le produit semi-direct $G^p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Plus généralement, pour tous sous-groupes $H \leq S_n$ du groupe symétrique et pour tous groupes G, le produit en couronne $G \wr H$ est le produit semi-direct $G^n \rtimes H$, où H agit sur G^n par permutation des composantes.

Exercise 8. (moyen) Montrez que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wr \ldots \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où ce produit contient r copies de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, est un p-sous-groupe de Sylow de S_{p^r}. Vous pouvez utiliser le fait qu'il existe un homomorphisme injectif de groupes $S_n \wr S_m \to S_{nm}$.

Exercise 9. (difficile) Montrez qu'un groupe G d'ordre 48 n'est pas simple.
Indice : Les noyaux des homomorphismes de groupes sont normaux.