THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 8

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (facile) Les groupes suivants sont-ils résolubles ? Si oui, écrivez une série sous-normale avec des quotients abéliens pour chacun.

(1) $\mathbb{Z}$

(2) S_3

(3) S_4

(4) D_{2n} pour tout n.

(5) $G \times H$, où G et H sont des groupes résolubles.

Exercise 3. (facile) Soient G et H des groupes nilpotents, montrez alors que $G \times H$ est aussi un groupe nilpotent.

Exercise 4. (facile) Soit G un groupe quelconque. Rappelez-vous qu'un automorphisme d'un groupe G est simplement un isomorphisme $G \to G$. On dit qu'un sous-groupe $H \subseteq G$ est appelé sous-groupe caractéristique si $\varphi(H) = H$ pour tous les automorphismes φ de G.

(1) Montrez qu'un sous-groupe caractéristique de G est toujours un sous-groupe normal.

(2) Montrez que $Z(G)$, le centre de G, est un sous-groupe caractéristique de G.

(3) Montrez que $[G, G]$, le sous-groupe des commutateurs de G, est un sous-groupe caractéristique de G.

Exercise 5. (moyen) Soit G un p-groupe fini, montrez alors que G est résoluble.

Exercise 6. (moyen)

(1) Soit G un groupe simple qui est aussi résoluble. Montrez que G doit être abélien. Concluez que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

(2) Montrez qu'un groupe résoluble ayant une série de composition est nécessairement fini.

(3) Montrez qu'un groupe fini est résoluble si et seulement si ses facteurs de composition sont des groupes cycliques d'ordre premier.

Exercise 7. (moyen) Soit k un corps quelconque. Considérons le groupe B des matrices triangulaires supérieures inversibles 2×2 sur k :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in k^\times, b \in k \right\}.$$

Montrez que B est un groupe résoluble en exhibant une série sous-normale pour B avec des quotients abéliens.

Exercise 8. (difficile) L'objectif de cet exercice est de montrer que $A_n \triangleleft S_n$ est le seul sous-groupe normal non trivial de S_n pour $n \geq 5$. Soit donc $1 \neq H \triangleleft S_n$ un sous-groupe normal non trivial.

(1) Montrez que le centre de S_n est trivial pour $n \geq 3$.
Indice : Écrivez $\alpha \in S_n$ comme un produit de cycles disjoints et construisez $\beta \in S_n$ tel que
$$\alpha^{-1}\beta\alpha \neq \beta.$$
(2) Supposez que $H \cap A_n = 1$. Montrez que H contient un élément σ d'ordre 2, et que σ est en fait le seul élément non trivial, c'est-à-dire que H est un sous-groupe d'ordre 2.
(3) En utilisant le premier point, trouvez une contradiction en montrant que $\sigma = 1$.
(4) Concluez.