THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 7

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (facile) Montrer qu'un sous-groupe normal $H \trianglelefteq G$ est un sous-groupe normal maximal de G si et seulement si G/H est un groupe simple.

Exercise 3. (facile) Déterminer une série de composition pour $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Lister et identifier chaque facteur de composition attaché à votre série de composition. La série de composition est-elle unique ? Les facteurs de composition sont-ils uniques ?

Exercise 4. (medium) Le groupe A_4 a-t-il une série de composition ? Si oui, trouvez-en une et identifiez les facteurs de composition. Pouvez-vous en déduire une série de composition pour S_4 ? Si oui, identifiez les facteurs de composition.

Exercise 5. (facile) Quels sont les facteurs de composition d'un produit semi-direct $G \rtimes_\varphi H$ en termes des facteurs de composition de G et H ?

Exercise 6. (moyen)

(1) Soit n un entier positif et soit $n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$ sa factorisation en nombres premiers. Trouver une série de composition pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Avec multiplicité, quels sont les facteurs de composition ?

(2) En supposant le théorème de Jordan-Hölder, prouvez que tout $n \in \mathbb{N}$ peut être décomposé de manière unique comme produit de puissances de nombres premiers.

Exercise 7. (moyen) Trouver une série de composition pour D_{2n} et lister les facteurs de composition. Quelle est la longueur de la série de composition ?

Exercise 8. (moyen) *Construction d'un groupe simple infini*
Soit
$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq ...$$
une suite de groupes simples, alors montrer que
$$G := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

est un groupe simple. En utilisant cela, donnez un exemple de groupe simple infini.

Notation : Soit G un groupe. Si G a une série de composition $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$, alors on note longueur$(G) := n$. Cela est bien défini par un théorème vu en cours.

Soit G un groupe. Une chaîne normale ascendante de G est une chaîne de sous-groupes de G du type

$$G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots$$

Les chaînes normales descendantes sont définies de la même manière, avec des inclusions inversées.

Exercise 9. (difficile) Soit G un groupe. Pour 1), 2) et 3) supposez que G ait une longueur finie.

(1) Considérez une suite exacte courte

$$1 \to K \to G \to L \to 1$$

Prouvez que longueur(K), longueur$(L) < +\infty$ et que

$$\text{longueur}(K) + \text{longueur}(L) = \text{longueur}(G).$$

(2) Prouvez que si $K \trianglelefteq G$ est un sous-groupe normal *propre*, alors

$$\text{longueur}(K) < \text{longueur}(G).$$

(3) Prouvez que toutes les chaînes normales ascendantes et descendantes composées uniquement de sous-groupes normaux de G sont finies et que le nombre de sous-groupes distincts apparaissant dans une telle chaîne est au plus longueur$(G) + 1$.

(4) Prouvez qu'un groupe G a une longueur finie si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

   (a) Toute chaîne normale descendante commençant par un sous-groupe normal H de G se stabilise, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_i = G_n$ pour tout $i \geq n$.

   (b) Si H est un sous-groupe normal de G, alors toutes les chaînes normales ascendantes de H composées uniquement de sous-groupes normaux de H se stabilisent.