THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 6

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (facile) *Classification des groupes abéliens finis 1.0.* Classifiez tous les groupes abéliens des ordres suivants à isomorphisme près :

(1) 4
(2) 6
(3) 180
(4) 72
(5) 200.

Exercise 3. (facile) *Classification des groupes abéliens finis 2.0.*

(1) Soit A un groupe abélien d'ordre 100 qui ne contient aucun élément d'ordre 4. Prouvez que A possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(2) Soit p un nombre premier. Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre p^5, à isomorphisme près ? Plus généralement, combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre p^n pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire ?

Exercise 4. (facile) Soit $\{A_\alpha |\ \alpha \in I\}$ un ensemble de groupes abéliens. Montrez que

(1) $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} \mathrm{Tors}(A_\alpha) \cong \mathrm{Tors}(\bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha)$;
(2) $\mathrm{Tors}(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \prod\limits_{\alpha\in I} \mathrm{Tors}(A_\alpha)$;

Trouvez un exemple qui montre que l'inclusion du deuxième point peut être stricte.

Exercise 5. (moyen) Soit $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ où $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers positifs. Montrez que

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}.$$

Soit A un groupe abélien. On dit qu'un élément $a \in A$ est n-**divisible** pour un entier n s'il existe $b \in A$ tel que $a = nb$. On dit que A est n-**divisible** si tous les éléments de A sont n-divisibles. De plus, on dit que A est **divisible** si A est n-divisible pour tous les entiers n.

Exercise 6. (moyen) *Groupes abéliens divisibles*

(1) Donnez un exemple d'un groupe abélien fini qui est 2-divisible mais pas 3-divisible.
(2) Donnez un exemple d'un groupe abélien infini qui est 2-divisible mais pas 3-divisible.
(3) Donnez un exemple d'un groupe abélien divisible.
(4) Prouvez qu'un groupe abélien divisible fini doit être trivial.

Exercise 7. (difficile) Soit G un groupe abélien de type fini qui s'insère dans la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to 0.$$

Classifiez G à isomorphisme près.

Exercise 8. (difficile) Soit G un p-groupe (pas nécessairement abélien) d'ordre p^n, où p est un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Prouvez sans utiliser de théorème qui rend l'énoncé trivial que G possède un élément d'ordre p.
(2) Prouvez que G possède (au moins) un sous-groupe normal d'ordre p^k pour tout $0 \leq k \leq n$.
(3) Prouvez qu'il existe un entier m et une chaîne (finie) de sous-groupes normaux emboîtés de G

$$\{e\} = G_m \trianglelefteq G_{m-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_0 = G$$

telle que chacun des quotients G_{i-1}/G_i soit abélien pour $1 \leq i \leq n$.

Indice : Utilisez l'induction et le point précédent.
Remarque : Un groupe qui admet une telle chaîne est appelé **résoluble**. Vous n'avez pas besoin des résultats sur les groupes résolubles (que vous verrez plus tard) pour prouver l'énoncé.