THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 5

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. *Quelques exemples de sous-groupes de torsion*
Déterminer $\mathrm{Tors}(A)$ pour les exemples suivants de groupes abéliens.

(1) A est un groupe abélien fini.
(2) $A = (\mathbb{Q}, +)$.
(3) $A = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
(4) $A = \mathbb{C}^\times$.
(5) A est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
(6) A est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^k$ pour $k \geq 2$.

Exercise 3. Montrer que si G est abélien et finiment engendré tel que $\mathrm{Tors}(G) = G$, alors G est un groupe fini.

Exercise 4. *Groupes abéliens libres*
Étant donnée une famille de groupes abéliens $(A_i)_{i \in I}$, nous définissons leur somme directe comme le groupe abélien

$$\bigoplus_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} | a_i \in A_i, \text{pour tout } i, \text{seuls un nombre fini des } a_i \text{ sont non-nuls}\}$$

où l'addition est effectuée composante par composante.
Prouvez que les affirmations suivantes sont équivalentes pour un groupe abélien A :

(1) A est un groupe abélien libre. C'est-à-dire

$$A \cong \mathbb{Z}^{\oplus I} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}.$$

Pour un certain ensemble d'indexation I (pas nécessairement fini).

(2) Il existe un ensemble I et un sous-ensemble $B = \{a_i \mid i \in I\} \subset A$ appelé une **base**, tel que tous les éléments $x \in A$ peuvent être écrits de manière unique comme des sommes finies

$$x = \sum_{k \in I} n_k a_k$$

où tous sauf un nombre fini de n_k sont égaux à 0. Notez que la condition d'unicité implique que les éléments d'une base sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

Exercise 5. *Propriété universelle des groupes abéliens libres*
Montrer qu'un groupe abélien G est libre si et seulement s'il existe un sous-ensemble $B \subset G$ satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tous les groupes abéliens A et toute fonction d'ensemble $f : B \to A$, il existe un homomorphisme de groupes unique $\varphi : G \to A$ tel que $\varphi \circ i = f$, c'est-à-dire le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

où $i : B \to G$ est l'inclusion de l'ensemble. Notez que le sous-ensemble B est une **base** du groupe abélien libre G.

Exercise 6. Soit $F = \mathbb{Z}^3$ et définissez une fonction $f : F \to \mathbb{Z}^2$ sur une base (e_1, e_2, e_3) par

$$f(e_1) = (1, 0); \ f(e_2) = (1, 1), \ f(e_3) = (0, -1).$$

En utilisant la propriété universelle des groupes abéliens libres, montrez que vous pouvez prolonger de manière unique f en un homomorphisme de groupes. L'image de f est-elle libre abélienne ?

Exercise 7. Rappelez-vous que le rang d'un groupe abélien libre finiment engendré A est l'entier positif r tel que

$$A \cong \mathbb{Z}^r.$$

Rappelez-vous aussi qu'il a été montré en classe que si $A \subseteq \mathbb{Z}^r$ est un sous-groupe, alors $A \cong \mathbb{Z}^k$ pour un certain $k \leq r$. Nous verrons aussi dans le prochain exercice que le rang d'un groupe libre-abélien est bien défini.
Calculez le rang des groupes abéliens libres suivants.

(1) Sous-groupe engendré par $(1, 1)$ dans $\mathbb{Z}^2$.
(2) Sous-groupe engendré par $(1, 2)$ et $(-3, -6)$ dans $\mathbb{Z}^2$.
(3) $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ en tant que sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
(4) Sous-groupe engendré par $(2, 3, 8), (1, 5, 1)$ et $(1, -9, 34)$ dans $\mathbb{Z}^3$.
(5) Sous-groupe engendré par $(2, 3, 8), (1, 5, 1)$ et $(1, -9, 13)$ dans $\mathbb{Z}^3$.

Exercise 8. Montrer que si $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m$, alors $n = m$.
Indice : Vous savez par l'algèbre linéaire que cette affirmation est vraie si à la place de $\mathbb{Z}$ nous avions un corps k et un isomorphisme k-linéaire. Pouvez-vous vous ramener à ce cas en quotientnant par des sous-groupes appropriés ?

Exercise 9. Montrer que les rationnels positifs $\mathbb{Q}^{>0}$ avec loi de groupe donnée par la multiplication habituelle ne forment pas un groupe abélien finiment engendré. Cependant, montrez qu'il s'agit d'un groupe abélien libre en exhibant une base.

Pour ceux d'entre vous qui s'intéressent plus à l'algèbre :

Exercise 10. Prouver qu'un groupe abélien finiment engendré F est libre si et seulement si pour toute paire (ϕ, ψ), où $\phi : G \to H$ est un homomorphisme surjectif entre deux groupes abéliens G et H, et $\psi : F \to H$ est un homomorphisme, il existe un homomorphisme $\alpha : F \to G$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, dashed, "\exists\alpha"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ G \arrow[r, two heads, "\phi"'] & H \end{tikzcd}$$

Note : Nous appelons un groupe abélien qui satisfait la propriété ci-dessus projectif. Cet exercice prouve qu'être projectif est équivalent à être libre dans le cas des groupes abéliens finiment engendrés.

Exercise 11. Notez qu'un homomorphisme $A \to B$ de groupes abéliens induit une application

$$\mathrm{Tors}(A) \to \mathrm{Tors}(B).$$

Maintenant, considérez la suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Déterminez si

$$0 \to \mathrm{Tors}(A) \to \mathrm{Tors}(B) \to \mathrm{Tors}(C) \to 0$$

est également exacte en général.