THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 13

Sauf indication contraire, toutes les représentations sont définies sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. Cependant, la plupart des résultats restent valables sur un corps arbitraire également.

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (facile) *Échauffement*

(1) Soit $G = \{e\}$ le groupe trivial. Montrez que les représentations de G sur un corps k sont en bijection avec les espaces vectoriels sur k.
(2) Pour tout groupe G, démontrez que toute représentation unidimensionnelle de G est irréductible.
(3) Montrez que tout groupe G possède une représentation irréductible.

Exercise 3. (facile) Soit V une représentation d'un groupe G.

Par $\langle G \cdot v\rangle_{\mathbb{C}}$, on désigne la sous-représentation de V engendrée par $v \in V$. Celle-ci peut être considérée comme la plus petite sous-représentation de V contenant v ou comme l'espace de toutes les combinaisons linéaires sur $\mathbb{C}$ des éléments de l'orbite $G \cdot v$.

Montrez que V est une représentation irréductible de G si et seulement si $\langle G \cdot v\rangle_{\mathbb{C}} = V$ pour tout $v \in V \setminus \{0\}$.

Exercise 4. (moyen)

(1) Étant donné un groupe fini G, montrez qu'il existe un homomorphisme de groupes injectif
$$G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
où $n = |G|$.

(2) Soit V une représentation irréductible d'un groupe fini G. Montrez que $\dim V \leq |G|$.

Remarque : En fait, on peut montrer $(\dim V)^2 \leq |G|$. Mais cela nécessite des outils plus avancés que ceux que nous avons vus.

Exercise 5. (moyen) *Quelques représentations irréductibles de S_n*

(1) Trouvez toutes les représentations unidimensionnelles de S_n.
(2) Considérez l'espace vectoriel suivant

$$V_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_i x_i = 0\}.$$

  (a) Soient $e_1, ..., e_n$ la base standard de $\mathbb{C}^n$. Trouvez une base de V_n en termes de cette base.
  (b) Montrez que S_n agit sur V_n en permutant les coordonnées. Cela fait de V_n une représentation de S_n.
  (c) Enfin, montrez que V_n est une représentation irréductible de S_n. Cette représentation irréductible de dimension $n-1$ de S_n est appelée la représentation standard de S_n.

Exercise 6. (moyen) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ *comme une représentation de G*

Rappel : Étant donné des espaces vectoriels V et W, l'ensemble des applications linéaires entre V et W, noté $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(1) Soient V, W des représentations d'un groupe G. Montrez que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ possède la structure d'une représentation de G, avec l'action de G définie comme suit

$$(g \cdot T)(v) := g \cdot (T(g^{-1} \cdot v))$$

où $g \in G$, $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ et $v \in V$.

(2) On désigne l'ensemble des entrelacements de G entre V et W par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W)$. Considérez également le sous-espace suivant de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G := \{T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \mid g \cdot T = T \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Montrez que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G$.

Ainsi, l'espace des entrelacements est exactement la sous-représentation de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ sur laquelle G agit trivialement.

Exercise 7. (difficile) *Représentations irréductibles des groupes abéliens finis*

(1) Soit G un groupe abélien fini. Montrez que toutes les représentations irréductibles de G sont unidimensionnelles.
(2) Quelles sont toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?