THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 12

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (facile) Soit

$$1 \to H \to G \to F \to 1$$

une suite exacte courte de groupes telle que F soit un groupe libre. Montrez que la suite est scindée.

Exercise 3. (facile) Soit F un groupe libre sur un ensemble S où $|S| \geq 2$. Montrez que F est sans torsion et possède un centre trivial.

Exercise 4. (facile) Soient X et Y des ensembles disjoints. Soit N le sous-groupe normal de $F_{X \cup Y}$ engendré par Y. Montrez que $F_{X \cup Y}/N \cong F_X$.

Exercise 5. (moyen) *Le groupe des Quaternions*
Considérez le groupe

$$Q_8 := \left\langle i, j, k \mid i^4 = 1,\, i^2 = j^2 = k^2 = ijk \right\rangle .$$

Le groupe Q_8 est appelé le groupe des Quaternions.

(1) Définissez l'élément $-1 := i^2$. Montrez que -1 est dans le centre de Q_8.
(2) Montrez que Q_8 est un groupe fini d'ordre 8.
(3) Trouvez le centre de Q_8.
(4) Montrez que tous les sous-groupes de Q_8 sont normaux.

Exercise 6. (moyen) Calculez les abélianisés des groupes suivants :

(1) A_5,
(2) A_4,
(3) S_n pour $n \geq 5$,
(4) F_S où $|S| = 2$,
(5) $\left\langle a, b \mid a^2b^3,\, a^4b^5 \right\rangle$.

Exercise 7. (difficile)

(1) Montrez que $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Montrez que $\langle x, y \mid x^3 = 1,\ y^3 = 1,\ (xy)^2 = 1 \rangle \cong A_4$.

(3) Prouvez que A_5 peut être engendré par un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 2.

(4) Prouvez que F_S n'est pas résoluble lorsque $|S| \geq 2$.