

## THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 11

Comme la série de la semaine passée était plus difficile et plus longue que d'habitude, profitez de cette série plus courte pour rattraper toute série inachevée, les corriger et réviser le contenu du cours !

**Exercice 1.** *À faire après chaque cours !*

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

**Exercice 2.** (facile)

Montrez que les groupes nilpotents ont des centres non triviaux.

**Exercice 3.** (facile) Soit  $G$  un groupe nilpotent. Si  $H$  est un sous-groupe normal minimal de  $G$ , montrez que  $H \subseteq Z(G)$ .

**Exercice 4.** (moyen) Pour quelles valeurs de  $n$  les groupes suivants sont-ils nilpotents ?

(1)  $S_n$

(2)  $D_{2n}$

**Exercice 5.** (moyen) Montrez qu'un groupe fini  $G$  est nilpotent si et seulement si chaque sous-groupe maximal de  $G$  est normal dans  $G$ .

**Indice :** Exercice 7 de la série 9.

**Exercice 6.** (difficile) Soit  $G$  un groupe fini et soit  $J$  l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de  $G$ .

(1) Montrez que  $J$  est un sous-groupe normal de  $G$ .

(2) Montrez que  $J$  est un groupe nilpotent.