THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 10

Exercise 1. *À faire après chaque cours !*
Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercise 2. (Moyen) *Sous-groupes d'indice premier*
Soit G un groupe fini avec un sous-groupe $H \leq G$ d'indice premier p, et supposons que p est le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrez que H est normal dans G.

Indice : Considérez l'action $G \curvearrowright G/H$ et montrez que $\ker(G \to S_p) = H$ en prouvant que les deux sous-groupes ont le même indice.

Exercise 3. (Moyen)

(1) Soit p un nombre premier. Montrez qu'un groupe d'ordre p^n est simple si et seulement si $n = 1$.
(2) Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrez qu'un groupe d'ordre pq ne peut pas être simple.
(3) Soient p et q deux nombres premiers distincts, montrez qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre p^2q.
(4) Soient p, q et r trois nombres premiers distincts, montrez qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre pqr.

Exercise 4. (Moyen) Considérons le célèbre résultat suivant connu sous le nom de Théorème de Burnside :

Théorème : Soient p et q des nombres premiers, alors tout groupe d'ordre $p^a q^b$ est résoluble.

En supposant le théorème de Burnside, démontrez que les groupes non abéliens d'ordre strictement inférieur à 60 ne peuvent pas être simples.

Exercise 5. (Difficile) Soit $n \geq 2$. Montrez qu'un groupe d'ordre $2^n \cdot 3$ possède un sous-groupe normal propre non trivial.

Exercise 6. (Difficile)

(1) Soit L un groupe cyclique fini, K un groupe, et $\varphi_1, \varphi_2 : L \to \mathrm{Aut}(K)$ deux actions de groupe. Montrez que si $\varphi_1(L)$ et $\varphi_2(L)$ sont des sous-groupes conjugués de $\mathrm{Aut}(K)$, alors les deux produits semi-directs induits sont isomorphes
$$K \rtimes_{\varphi_1} L \cong K \rtimes_{\varphi_2} L.$$

Indice : Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ tel que $\sigma\varphi_1(L)\sigma^{-1} = \varphi_2(L)$. Vous pouvez trouver $a \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma \circ \varphi_1(l) \circ \sigma^{-1} = \varphi_2(l)^a$ pour tout $l \in L$. Définissez $K \rtimes_{\varphi_1} L \to K \rtimes_{\varphi_2} L$ par $(k, l) \mapsto (\sigma(k), l^a)$.

(2) Montrez qu'il existe un unique (à isomorphisme près) produit semi-direct non trivial de la forme $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indice : Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est cyclique (vous n'avez pas besoin de le démontrer).

(3) Montrez qu'il existe un unique (à isomorphisme près) produit semi-direct non trivial de la forme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indice : Montrez que tout automorphisme de K est L-linéaire, puis utilisez les théorèmes de Sylow.

Exercise 7. (Difficile) *Classification des groupes d'ordre p^3*
Soit p un nombre premier impair. Nous avons vu que tout groupe d'ordre p^2 est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans cet exercice, nous voulons classifier les groupes d'ordre p^3.

(1) Classifiez tous les groupes abéliens d'ordre p^3.

Supposons maintenant que G n'est pas abélien.

(2) Supposons que G possède un élément d'ordre p^2. Montrez que
$$G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
pour un certain $\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$. Concluez qu'il existe un unique groupe non abélien d'ordre p^3 contenant un élément d'ordre p^2.

(3) Supposons maintenant que G ne possède pas d'élément d'ordre p^2. Montrez que
$$G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
pour un certain $\varphi : \mathbb{Z}/p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Concluez qu'il existe un unique groupe non abélien d'ordre p^3 ne contenant pas d'élément d'ordre p^2. Notez que dans ce cas, tout élément non trivial est d'ordre p.

(4) Classifiez tous les groupes d'ordre p^3.

Pour les intéressés, voici une construction des groupes non abéliens d'ordre p^3 :

(5) Soit G le groupe
$$G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \text{ et } a \equiv 1 \pmod p \}$$
muni de la multiplication matricielle. Montrez que G est un groupe non abélien d'ordre p^3 isomorphe au produit semi-direct non trivial $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(6) Soit G le groupe de Heisenberg
$$\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \}$$
muni de la multiplication matricielle. Montrez que G est un groupe non abélien d'ordre p^3 isomorphe au produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.