Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 9

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Soit $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} y''(t) &= f(t), \quad 0 < t < 1 \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0 \end{aligned}$$

Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

1. Soient $F(z)$ et $Y(z)$ les transformées de Laplace de f et y. On a
$$Y(z) = \tfrac{F(z)}{z^2} + \tfrac{y'(0)}{z^2}.$$
2. $y(t) = \int_0^t f(s)(t-s)\mathrm{d}s + ty'(0)$.
3. $y(t) = \int_0^t f(s)(t-s)\mathrm{d}s + t\int_0^1 f(s)(1-s)\mathrm{d}s$

Exercice 2 On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \quad t > 0 \\ y'(t) = y(t) - 2x(t), \quad\;\; t > 0 \\ x(0) = 8, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

On note $X(z) = \mathcal{L}(x)(z)$ et $Y(z) = \mathcal{L}(y)(z)$.

1. En appliquant la transformée de Laplace aux équations, on obtient :
$$\begin{aligned} (z-a)X(z) + bY(z) &= 8 \\ cX(z) + (z-d)Y(z) &= 3 \end{aligned}$$
pour certaines constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Déterminez leurs valeurs.
2. En résolvant le système ci-dessus pour $X(z)$ et $Y(z)$, on trouve :
$$X(z) = \tfrac{e}{z+1} + \tfrac{f}{z-4}, \quad Y(z) = \tfrac{g}{z+1} + \tfrac{h}{z-4},$$
pour certaines constantes $e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Déterminez leurs valeurs.
3. Concluez en déterminant une expression explicite de $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 3 Soit $F(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-1)^2}$ et, pour un certain $r > 3$, on définit la courbe $\Gamma_{2,r} = L_{2,r} \cup C_{2,r}$ où :

$$\begin{aligned} L_{2,r} &= \{z \in \mathbb{C}, z = 2 + is, \ -r < s < r\}, \\ C_{2,r} &= \left\{z \in \mathbb{C}, z = 2 + re^{i\theta}, \ \tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{3\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Soit $t > 0$ quelconque. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse.

1. $\displaystyle\int_{\Gamma_{2,r}} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_1\left(F(z)e^{zt}\right) + \mathrm{Res}_{-1}\left(F(z)e^{zt}\right)\right)$

2. $\mathrm{Res}_1\left(F(z)e^{zt}\right) = \frac{1}{16}e^t(2t-1)$

3. $\mathrm{Res}_{-1}\left(F(z)e^{zt}\right) = \frac{1}{16}e^t\left(1-2t^2\right)$

4. $\displaystyle\int_{L_{2,r}} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z = i\int_{-r}^{r} F(2+is)e^{(2+is)t}\mathrm{d}s$

5. $\displaystyle\int_{C_{2,r}} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\left(2+re^{i\theta}\right)e^{(2+r\cos\theta+ir\sin\theta)t}ire^{i\theta}}{\left(3+re^{i\theta}\right)^3\left(1+re^{i\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta$

6. $\displaystyle\left|\int_{C_{2,r}} F(z)e^{zt}\mathrm{d}z\right| \leq \pi\frac{(r+2)e^{2t}r}{(r-3)^3(r-1)^2}$

7. $\displaystyle f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(2+is)e^{(2+is)t}\mathrm{d}s$

8. $f(t) = \frac{1}{16}e^t(2t-1) + \frac{1}{16}e^t\left(1-2t^2\right)$