Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 8

Exercice 1 Soit $\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \frac{\pi}{2}| = 1 \right\}$. Calculez la valeur de

$$\int_\gamma \frac{z^2 \sin(z)}{(z-\frac{\pi}{2})^2} \mathrm{d}z$$

en utilisant

1. la formule intégrale de Cauchy.
2. le théorème des résidus.

Exercice 2

1. Supposons que γ soit une courbe fermée, régulière et simple entourant l'origine. Expliquez avec les résultats du cours pourquoi
$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. Supposons que γ soit une courbe fermée, régulière et simple entourant $z_0 \in \mathbb{C}$. Expliquez avec les résultats du cours pourquoi
$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Rappelez que les coefficients de la série de Laurent autour de z_0 sont définis par
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$
Supposons que $z_0 \in \mathbb{C}$ et qu'une fonction f puisse s'écrire
$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m (z - z_0)^m.$$
Utilisez la formule pour c_n et les questions précédentes pour montrer que $d_n = c_n$.

Exercice 3 Calculez le développement en série de Laurent autour de l'origine des fonctions suivantes et en déduisez $\mathrm{Res}_0(f)$.

1. $f(z) = z^2 \exp(1/z^2)$.
2. $f(z) = (z + 1) \exp(1/z)$.
3. $f(z) = \cos(1/z + \pi/2)$.

Exercice 4 Pour l'exercice suivant, vous pouvez utiliser la Table 1 de la session d'exercices 6 ainsi que les propriétés de la transformée de Laplace (voir Théorème 16.2 dans le livre).

1. Calculez la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-2t}(3\cos(6t) - 5\sin(6t))$.
2. Trouvez la fonction f dont la transformée de Laplace est $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$.