

---

## Série 7

---

**Exercice 1** Vérifiez les transformées de Laplace du Tableau 1.

*Indice* : vous pouvez utiliser la définition de la transformée de Laplace pour les premières (les plus basiques) et exploiter ses propriétés (voir le Théorème 16.2 du livre) pour trouver les autres.

**Exercice 2** À partir de maintenant, vous pouvez utiliser les résultats du tableau 1 sans justification supplémentaire. Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Trouvez  $f$  dont la transformée de Laplace est

1.  $F(z) = \frac{z}{(z^2+a^2)^2}$ .

*Indication* : Calculez  $\frac{d}{dz} \frac{1}{z^2+a^2}$  et utilisez la propriété de la dérivée d'une transformée de Laplace (Théorème 16.2(i) dans le livre).

2.  $F(z) = \log\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)$ .

*Indication* : Calculez  $F'(z)$  et utilisez la propriété de la dérivée d'une transformée de Laplace (Théorème 16.2(i) dans le livre).

Figure 1: Frequently used Laplace transforms.

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$
1	$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (impulsion de Dirac)	$\frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha z} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1 \quad \forall z$
2	$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{z} \quad \text{Re } z > 0$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{z + \alpha} \quad \text{Re } z > -\alpha$
4	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{Re } z > 0$
5	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(z + \alpha)^2} \quad \text{Re } z > -\alpha$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{z^2 + \omega^2} \quad \text{Re } z > 0$
7	$\cos \omega t$	$\frac{z}{z^2 + \omega^2} \quad \text{Re } z > 0$
8	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(z - \alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{Re } z > \alpha$
9	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{z - \alpha}{(z - \alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{Re } z > \alpha$
10	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{z^2 - \omega^2} \quad \text{Re } z >  \omega $
11	$\cosh \omega t$	$\frac{z}{z^2 - \omega^2} \quad \text{Re } z >  \omega $
12	$e^{\alpha t} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(z - \alpha)^2 - \omega^2} \quad \text{Re } z > \alpha +  \omega $
13	$e^{\alpha t} \cosh \omega t$	$\frac{z - \alpha}{(z - \alpha)^2 - \omega^2} \quad \text{Re } z > \alpha +  \omega $
14	$t \cos \omega t$	$\frac{z^2 - \omega^2}{(z^2 + \omega^2)^2} \quad \text{Re } z > 0$