Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 6

Exercice 1 Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple fermée, par morceaux régulière. Calculer les intégrales suivantes en fonction de la courbe γ.

1. $\int_\gamma e^{1/z^2} \mathrm{d}z$
2. $\int_\gamma \frac{z^2+2z+1}{(z-3)^3} \mathrm{d}z$
3. $\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^2} \mathrm{d}z$
4. $\int_\gamma \frac{1}{(z-i)(z+2)^2(z-4)} \mathrm{d}z$

Exercice 2 Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{13-5\cos 2\theta} \mathrm{d}\theta$.

Indice : Utiliser le théorème des résidus en reformulant cette intégrale comme une intégrale curviligne sur le cercle unité. Le point de départ est d'observer que pour $z = e^{i\theta}$, nous avons

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$\cos 2\theta = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right).$$

Exercice 3

1. Considérons $\theta \in [0, \pi]$, $r > 0$ et posons $z = re^{i\theta}$. Montrer que :
   (a) $|e^{iz}| \leq 1$,
   (b) $r^4 - 16 \leq |z^4 + 16|$.
2. En utilisant les questions précédentes, montrer que pour $\theta \in [0, \pi]$, $r > 2$ et en posant $z = re^{i\theta}$, on a :
$$\left|\frac{e^{iz}}{z^4+16}\right| \leq \frac{1}{r^4-16}.$$
3. Soit C_r le demi-cercle centré en 0, de rayon $r > 2$ et entièrement situé dans le demi-plan supérieur du plan complexe. Déduire de la question précédente que :
$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{16+z^4}\mathrm{d}z\right| = 0.$$
4. Utiliser la question précédente pour calculer :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{16+x^4}\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{16+x^4}\mathrm{d}x$$

et