**Analyse IV** — MATH-207(a)

Printemps 2025 — Dr. Yoav Zemel

---

**Série 5**

---

**Exercice 1** For each of the following functions compute the Laurent series in the given $z_0$, determine its region of convergence, specify the nature of the singularity and report the residue.

(a) $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z_0 = 0$.

(b) $f(z) = e^{1/z}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z_0 = 0$.

(c) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ in $z_0 = 1$.

(d) $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ in $z_0 = \pi$.

(e) $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(z-1)^2}$ in $z_0 = 1$.

**Exercice 2** Calculer au moins la partie singulière de la série de Laurent des fonctions suivantes, déterminer sa région de convergence, spécifier la nature de la singularité et rapporter le résidu.

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{\sin(z^2)}$ en $z_0 = 0$.

(b) $f(z) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}$ en $z_0 = 1$.

(c) $f(z) = \frac{\log(1+z)}{\sin(z^2)}$ en $z_0 = 0$.

(d) $f(z) = \frac{\sin z}{z(e^z-1)}$ en $z_0 = 0$.

**Exercice 3** Considérons $f(z) = \log(1+z)$.

(a) Déterminer la plus grande région de $\mathbb{C}$ où $f$ est holomorphe.

(b) Calculer la série de Taylor en $z_0 = 0$ et déterminer le rayon de convergence.

(c) Calculer la série de Taylor en $z_0 = i$ et déterminer le rayon de convergence.

**Exercice 4** Considérons $f(z) = \frac{\sin(z^2+1)}{(z^2+1)^2}$.

(a) Trouver toutes les singularités de $f$ et déterminer leur nature.

(b) Calculer le résidu en chaque singularité.

(c) Déterminer la région de convergence des séries de Laurent autour de chaque singularité.