Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 3

Exercice 1 Calculer les intégrales de contour suivantes.

(a) $\int_\gamma (z^2+1)dz$ où $\gamma = [1, 1+i]$ (segment entre 1 et $1+i$).

(b) $\int_\gamma \mathrm{Re}(z^2)dz$, où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (cercle unité dans $\mathbb{C}$).

Exercice 2 Soit $\gamma_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle dans le plan complexe de centre 0 et de rayon 1, et $\gamma_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ le cercle de centre 2 et de rayon 1. Calculer la valeur des intégrales suivantes.

(a) $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$.

(b) $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2} dz$.

(c) $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$.

(d) $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2} dz$.

Exercice 3 Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter la valeur de

$$\int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z} dz$$

en fonction de la courbe γ.

Exercice 4 L'objectif de cet exercice est de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx)dx = 0.$$

(a) Montrer que $f(z) = e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(b) Considérons le chemin $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ représenté dans la Figure 1.

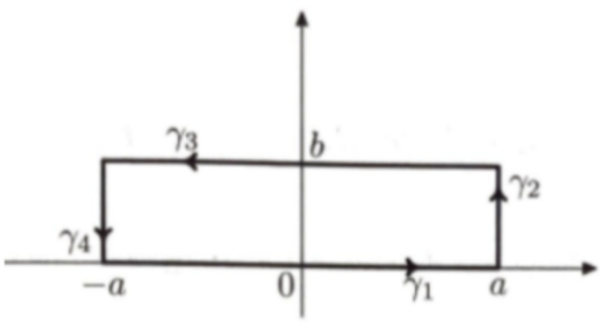

Figure 1 : Chemin dans le plan complexe pour l'exercice 4(b).

(i) Montrer que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(ii) Montrer que $\lim_{a\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = \lim_{a\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$.

(iii) En utilisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, conclure en montrant les résultats ci-dessus.