Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 2

Exercice 1 Soit $z = x + iy$, pour $x, y \in \mathbb{R}$, et notons $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ le module de z et $\arg z$ son argument. Le logarithme (complexe) de z est défini comme

$$\log(z) = \log|z| + i \arg z,$$

où $-\pi < \arg z \leq \pi$ et $\log|z|$ est le logarithme naturel du nombre réel $|z|$. Montrez que :

1. Le logarithme complexe est bien défini sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Le logarithme complexe est holomorphe sur

$$O = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

et que sa dérivée est

$$\frac{d\log(z)}{dz} = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in O.$$

Exercice 2 Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ et définissons $f(z) = z^\gamma = e^{\gamma \log(z)}$.

1. Montrez qu'en général, f est holomorphe sur $O = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$ et que sa dérivée est

$$f'(z) = \gamma z^{\gamma - 1}.$$

2. Que peut-on dire dans le cas où $\gamma \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 Montrez que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et calculez leur dérivée.

1. $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
2. $\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$.
3. $\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$.

Exercice 4 Soit $z = x + iy$, pour $x, y \in \mathbb{R}$, et considérons $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, avec $u, v \in C^2$. Montrez que si f est holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, alors u et v sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire que :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta v = 0.$$