Série 14

Exercice 1 Soit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \end{cases}$$

pour un $\sigma > 0$ donné. Utilisez la transformée de Fourier pour montrer que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+\sigma^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(t+\sigma^2)}}.$$

Exercice 2 Supposons que $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ soit solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t).$$

Trouvez une équation des ondes satisfaite par $v(x,t) = u(x,-t)$.

Exercice 3 Supposons que $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ soit solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Trouvez une équation aux dérivées partielles satisfaite par $v(x,t) = u(x,-t)$.