Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 13

Exercice 1 Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations différentielles suivantes.

1.
$$\begin{cases} b_n'(t) + \pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n(t) \quad t > 0 \\ b_n(0) = b_{0n}, \end{cases}$$
où $\beta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b_{0n} \in \mathbb{R}$ sont donnés.

2.
$$\begin{cases} b_n''(t) + c^2\pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n(t) \quad t > 0 \\ b_n(0) = b_{0n} \\ b_n'(0) = c_{0n}, \end{cases}$$
où $\beta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b_{0n}, c_{0n} \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire L-périodique donnée. En utilisant les séries de Fourier, trouver une fonction impaire L-périodique $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution du problème biharmonique suivant :
$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} = f.$$

Exercice 3 Soit $v : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = f \\ v(0,t) = 0, \ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = a_0(x). \end{cases}$$
pour une fonction régulière $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et des fonctions $v_0, a_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $v_0(0) = v_0(1) = a_0(0) = a_1(1) = 0$.
Multipliez la première équation par $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ et intégrez entre $x = 0$ et $x = 1$ pour montrer que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \right)^2 \right) \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 f(x,t) \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}x.$$

Exercice 4 Soit $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$
où $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée. Utilisez la transformée de Fourier pour montrer que
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2 + 4t^2}{4t}} \mathrm{d}y.$$