Analyse IV MATH-207(a)

Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 12

Exercice 1 Montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Indice : Considérez le carré de l'intégrale, transformez-le en l'intégrale d'une fonction de deux variables puis utilisez les coordonnées polaires.

Exercice 2 Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, calculez l'intégrale

$$\tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 a e^{-a^2(x-y)^2}\mathrm{d}y.$$

Bonus : Cette intégrale est appelée une moyenne pondérée autour de x. Pouvez-vous justifier ce nom ?

Exercice 3

1. Résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux limites inhomogènes :

$$\begin{cases} u''(x) = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = g_0, \\ u(1) = g_1. \end{cases}$$

   où $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$.

2. Nous nous intéressons à la résolution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites inhomogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(x,0) = a(x,0) \\ u(0,t) = g_0(t), \\ u(1,t) = g_1(t). \end{cases} \tag{1}$$

   où $g_0, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a(x,t) = (1-x)g_0(t) + xg_1(t)$.

   Soit $w(x,t)$ une solution quelconque de l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial^2 a}{\partial x}, \quad x \in (0,1) \\ w(x,0) = 0 \\ w(0,t) = 0, \\ w(1,t) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

   Montrer que $u(x,t) = w(x,t) + a(x,t)$ est une solution de l'équation (1).

Exercice 4 Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation de la chaleur suivante.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x} + u = 1, \quad x \in (0,1) \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0. \end{cases}$$

On a alors $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x)$. Trouver une équation différentielle ordinaire que chaque b_n doit satisfaire.