Analyse IV MATH-207(a)
Printemps 2025 Dr. Yoav Zemel

Série 11

Exercice 1 Considérons la fonction périodique $f(x)$ de période $T > 0$ qui est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \frac{T}{4} < |x| \leq \frac{T}{2} \\ 1 & |x| \leq \frac{T}{4}. \end{cases}$$

Expliquez pourquoi la série de Fourier de f ne contient pas de termes sinus. Calculez la série de Fourier de f.

Exercice 2 Vérifiez que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

résout l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sur la droite réelle $\mathbb{R}$ pour tout $t > 0$.

Exercice 3 Étant donné $n > 0$, montrez que l'équation de la chaleur sur $[0,1]$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin(2\pi n x) \end{cases}$$

est résolue par

$$u(x,t) = \exp(-\kappa 4\pi^2 n^2 t)\sin(2\pi n x).$$

Exercice 4 Montrez que l'équation de la chaleur sur $[0,1]$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos(2\pi n x) \end{cases}$$

est résolue par

$$u(x,t) = \exp(-\kappa 4\pi^2 n^2 t)\cos(2\pi n x).$$

Exercice 5 Supposons que nous ayons une solution quelconque de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), t > 0$$

avec des conditions aux limites de Neumann périodiques

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t).$$

Montrez que la chaleur totale

$$\int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x$$

reste la même pour tous les temps $t > 0$.