Formulaire

Transformées de Fourier

Pour $w \in \mathbb{R}$

	$f(y),\ y \in \mathbb{R}$	$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$
1	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (w > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w + i\alpha}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(w+i\alpha)b} - e^{-(w+i\alpha)c}}{w + i\alpha}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-iwy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(w+\alpha)b} - e^{-i(w+\alpha)c}}{w + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + w^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert w\alpha\rvert}}{\lvert w\rvert}$
7	$f(y) = \frac{e^{-\lvert wy\rvert}}{\lvert w\rvert} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + w^2}$
8	$f(y) = e^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert w\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
9	$f(y) = ye^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert w\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(y^2 + w^2)^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert w\rvert} - \lvert\alpha\rvert\right) e^{-\lvert w\alpha\rvert}$

Transformées de Laplace

Pour $\alpha > 0$, $w \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

	$f(t),\ t \geq 0$	$\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$	
1	$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha, & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$F_\alpha(z) = \frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha z} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 1$	$\forall z \in \mathbb{C}$
2	$f(t) = 1$	$F(z) = \frac{1}{z}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > 0$
3	$f(t) = e^{-z_0 t}$	$F(z) = \frac{1}{z + z_0}$	$\mathbb{R}\text{e}(z + z_0) > 0$
4	$f(t) = \frac{t^n}{n!}$	$F(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > 0$
5	$f(t) = te^{-z_0 t}$	$F(z) = \frac{1}{(z + z_0)^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z + z_0) > 0$
6	$f(t) = \sin(wt)$	$F(z) = \frac{w}{z^2 + w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > 0$
7	$f(t) = \cos(wt)$	$F(z) = \frac{z}{z^2 + w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > 0$
8	$f(t) = e^{z_0 t} \sin(wt)$	$F(z) = \frac{w}{(z - z_0)^2 + w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z - z_0) > 0$
9	$f(t) = e^{z_0 t} \cos(wt)$	$F(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z - z_0) > 0$
10	$f(t) = \sinh(wt)$	$F(z) = \frac{w}{z^2 - w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > \lvert w\rvert$
11	$f(t) = \cosh(wt)$	$F(z) = \frac{z}{z^2 - w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > \lvert w\rvert$
12	$f(t) = e^{z_0 t} \sinh(wt)$	$F(z) = \frac{w}{(z - z_0)^2 - w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z - z_0) > \lvert w\rvert$
13	$f(t) = e^{z_0 t} \cosh(wt)$	$F(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 - w^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z - z_0) > \lvert w\rvert$
14	$f(t) = t\cos(wt)$	$F(z) = \frac{z^2 - w^2}{(z^2 + w^2)^2}$	$\mathbb{R}\text{e}(z) > 0$

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`SCQ-01 - Holomorphe`] : *(2 points)* Si $f(z) = f(x + iy) = x + ay + i(bx + cy)$ est holomorphe, alors que valent a, b, c ?

■ $c = 1$ et $a = -b$
□ $a = 1$ et $c = -b$
□ $a = -1$ et $c = b$
□ $a = b = c = 1$

Question [`SCQ-02-Singularités`] : *(2 points)* Quels sont les pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3 + (2i-2)z^2 + (1-4i)z + 2i} \ ?$$

□ $z = -2i$
□ $z = -1, 2i$
■ $z = 1, -2i$
□ $f(z)$ n'a pas de pôles

Question [`SCQ-03-Singularites 2`] : *(2 points)* Quels sont les pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{\sin(z+1)} \ ?$$

□ $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
■ $z = -1 + k\pi, k \neq 0 \in \mathbb{Z}$
□ $z = -1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
□ $f(z)$ est holomorphe.

Question [`SCQ-04-Laurent`] : *(2 points)* Soit $Lf(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ la série de Laurent de $f(z)$ en $z_0 = 0$. Pour quelle fonction a-t-on

$$c_{2n} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ ?$$

□ $z^2 + 1$
□ $e^z \cos(z)$
□ $\tan(z)(z-1)$
■ $z^2 \sinh(z)$

Question [`SCQ-05-Laurent 2`] : *(4 points)* Quelle est la partie singulière de la série de Laurent de

$$f(z) = \frac{e^{z-i}}{z^2+1}, \quad \text{en } z_0 = i \ ?$$

□ $\dfrac{e^i}{z-i}$
■ $\dfrac{-i}{2(z-i)}$
□ $\dfrac{1}{z^2}$
□ 0

Question [`SCQ-06-Laurent 3`] : *(4 points)* Quelle est la partie singulière de la série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}, \quad \text{en } z_0 = 0 \ ?$$

■ $\dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z}$
□ $\dfrac{-1}{z^2} + \dfrac{1}{z}$
□ $\dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z}$
□ 0

Question [SCQ-07-Integration 1] : *(2 points)* Soient deux nombres complexes distincts $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Soient deux courbes régulières Γ_1 et Γ_2 respectivement paramétrées par

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \text{avec} \begin{cases} \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0, \\ \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z_1. \end{cases}$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe, laquelle des propositions suivantes est toujours vraie ?

- ☐ $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \;+\; \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \;=\; z_0 + z_1$
- ☐ $\displaystyle\int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = (z_1 - z_0) \cdot \mathrm{Long}(\Gamma_i),\; i = 1,2$
- ☐ $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \;+\; \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \;=\; 0$
- ■ $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \;=\; \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$

Question [SCQ-09-Integration 3] : *(2 points)* Soit Γ le cercle unité. Pour quelle fonction $f(z)$ a-t-on

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \;?$$

☐ $f(z) = z^2$ ■ $f(z) = \dfrac{1}{z - \frac{1}{2}}$ ☐ $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ ☐ $f(z) = \dfrac{1}{(z+\frac{1}{2})^2}$

Question [SCQ-10-Integration 4] : *(4 points)* Calculer

$$I = \int_{\Gamma} z^2\,dz,$$

où $\Gamma = [1, i]$ est le segment entre 1 et i.

☐ $I = 0$ ■ $I = \dfrac{-1-i}{3}$ ☐ $I = \dfrac{2i}{3}$ ☐ I n'est pas définie

Question [SCQ-11-Integration 5] : *(4 points)* Que vaut l'intégrale

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z/2}}{z^2+1}\,dz \;?$$

■ $2\pi i$ ☐ 2π ☐ $-\pi$ ☐ πe

Question [SCQ-12-Residus 1] : *(2 points)* Calculer le résidu de

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}, \quad \text{en } z_0 = 1.$$

☐ -8π ☐ $-4i$ ☐ 0 ■ -4

Question [SCQ-13-Laurent 3] **:** *(2 points)* Quelle fonction $f(z)$ admet la série de Laurent suivante en $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+1) z^n ?$$

- ☐ $\dfrac{1}{1+z^2}$
- ☐ $\sin(z)\cos(z)$
- ■ $\dfrac{2z-1}{z^4 - 2z^3 + z^2}$
- ☐ $\dfrac{z+2}{(z-1)^2}$

Question [SCQ-14-Residus 3] **:** *(2 points)* Si $f(z)$ admet des pôles d'ordre 1 $z_1 = 1$ and $z_2 = 2$ avec des résidus respectivement de 3 et -1, quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_{|z-\frac{3}{2}| \;=\; \frac{3}{2}} f(z)\, dz \ ?$$

- ☐ $2\pi i$
- ■ $4\pi i$
- ☐ 2π
- ☐ 4π

Question [SCQ-15-Laplace] **:** *(2 points)* Quelle est la transformée de Laplace de $\cos(2t)$?

- ☐ $\dfrac{z}{z^2-4}$
- ■ $\dfrac{z}{z^2+4}$
- ☐ $\dfrac{2}{z^2+4}$
- ☐ $\dfrac{2}{z^2-4}$

Question [SCQ-16-Laplace] **:** *(4 points)* Quelle est la transformée inverse de Laplace de

$$F(z) = \frac{1}{z^2+z}, \quad \text{avec } \mathbb{R}e(z) > 0 \ ?$$

- ■ $1 - e^{-t}$
- ☐ $e^{-t} - t$
- ☐ $t - e^{-t}$
- ☐ e^{-t}

Question [SCQ-17-Laplace 2] **:** *(2 points)* Si $F(z)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, alors quelle est la transformée de Laplace de $t^2 f(t)$?

- ■ $F''(z)$
- ☐ $z^2 F(z)$
- ☐ $\dfrac{2F'(z)}{z}$
- ☐ $\int_0^z (z-s)^2 F(s)\, ds$

Catalogue

Question [`SCQ-18-EDP 1`] : *(4 points)* Soit $u = u(x,t)$ une solution l'équation des ondes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + 2u(x,t) & \text{pour } x \in]0,1[, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{pour } x \in]0,1[\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} u(x,0) = g(x) & \text{pour } x \in]0,1[\end{cases}$$

En supposant que $u(x,t) = v(x)w(t)$, à la résolution de quel problèmes aboutit la méthode de séparation des variables vue au cours ?

■ $\begin{cases} v''(x) + 2v'(x) + (2+\lambda)v(x) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$ et $w''(t) + \lambda w(t) = 0$

□ $\begin{cases} v''(x) + 2v'(x) + \lambda v(x) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$ et $w''(t) + (2+\lambda)w(t) = 0$

□ $\begin{cases} w''(t) + 2w'(t) + (2+\lambda)w(t) = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$ et $v''(x) + \lambda v(x) = 0$

□ $\begin{cases} w''(t) + \lambda w(t) = 0 \\ w(0) = f(x) \\ w'(0) = g(x) \end{cases}$ et $v''(x) + 2v'(t) + (2+\lambda)v(x) = 0$

Question [`SCQ-19-PDE 2`] : *(6 points)* Soit l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + (2t+1)\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f, laquelle des fonctions suivantes est une solution de l'équation ?

Rappel : la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + f(x)y(x) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$y(x) = y_0 e^{-\int_0^x f(t)\,dt}.$$

□ $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{\alpha^4 t^4 + i\alpha x}\, d\alpha$

□ $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha^4 t + i\alpha x}\, d\alpha$

■ $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{-\alpha^4 (t^2+t) + i\alpha x}\, d\alpha$

□ $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{-\alpha^4 t^2 + i\alpha x}\, d\alpha$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-01`] : L'intégrale de $f(z) = z^2 + \sin(z^2)$ le long de toute courbe régulière, simple, fermée $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est nulle.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-02`] : La fonction $f(z) = \exp(1/z)$ admet un pôle d'ordre 1 en $z_0 = 0$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-03`] : La fonction $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-04`] : La dérivée de $f(z) = z\cos(z)$ satisfait les équations de Cauchy-Riemann.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-05`] : La fonction $f(z) = \mathbb{R}e(z)$, qui associe à tout nombre complexe sa partie réelle, est holomorphe.

□ VRAI ■ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 24: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8 *Réservé au correcteur*

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe telle que

$$u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy).$$

Calculer $f'(z)$.

Question 25: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ■10 *Réservé au correcteur*

Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe fermée, simple, régulière par morceaux et orientée positivement. Discuter selon Γ les valeurs de l'intégrale

$$I = \int_\Gamma \frac{\sin(z^2)}{z^3(z-2i)}\, dz.$$

Question 26: *Cette question est notée sur 12 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ■ 12 *Réservé au correcteur*

Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos(t))^2}\, dt.$$

Question 27: *Cette question est notée sur 11 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t, \quad t > 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 3. \end{cases}$$

(a) Calculer la transformée de Laplace $Y(z)$ de la solution y.

(b) En déduire la solution $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Simplifiez votre réponse.

Question 28: *Cette question est notée sur 16 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8
☐9 ☐10 ☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ■16

Réservé au correcteur

Calculer une solution $u(x,t)$ de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial^2 t}u(x,t) \;=\; \dfrac{\partial^2}{\partial^2 x}u(x,t) - 2\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) = e^x \sin(2\pi x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

Indication : les solutions non-nulles du problème

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + (1+\mu)y(x) = 0, & 0 < x < L \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

sont données par

$$\mu = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \; n > 0 \quad \textit{et} \quad y_n(x) = \beta_n e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

CATALOGUE