

Analyse complexe

Transformée de Laplace

Séries de Fourier et eq. aux dérivées partielles (EDP)

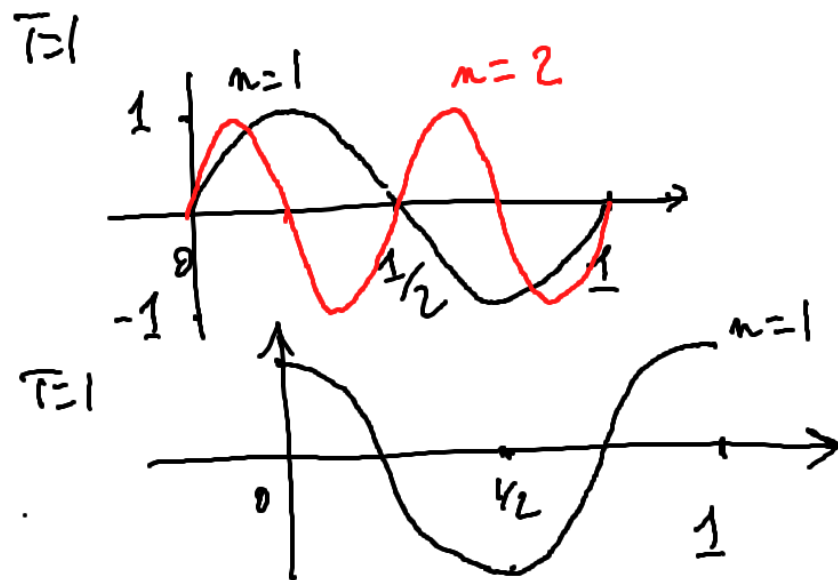
Transformées de Fourier et EDP

- Séries de Fourier : rappel Chap 14 Dacorogna Tanteri
- Eq de la chaleur
- Eq. des ondes

- Rappels:

• $\sin \frac{2\pi n x}{T}$

• $\cos \frac{2\pi n x}{T}$



$$\int_0^T \sin \frac{2\pi n x}{T} dx = 0 \quad n=1, 2, \dots$$

$$\int_0^T \cos \frac{2\pi n x}{T} dx = 0 \quad n=1, 2, \dots$$

• relations d'orthogonalité : (p.r. au produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x)g(x)dx$)

$$\int_0^T \sin \frac{2\pi n x}{T} \sin \frac{2\pi m x}{T} dx = 0 \quad n, m = 1, 2, \dots \quad n \neq m$$

$$\int_0^T \sin \frac{2\pi n x}{T} \cos \frac{2\pi m x}{T} dx = 0 \quad n, m = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^T \cos \frac{2\pi n x}{T} \cos \frac{2\pi m x}{T} dx = 0 \quad n, m = 1, 2, \dots \quad n \neq m$$

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi n x}{T} dx = \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi n x}{T} dx = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^T dx = T$$

• Séries trigonométriques : Nentier positif, Soit $f_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right) \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

On a : $\int_0^T f_N(x) dx = \frac{T a_0}{2}.$

$$\int_0^T f_N(x) \cos \frac{2\pi m x}{T} dx = a_m \frac{T}{2} \quad m = 1, 2, \dots \quad \int_0^T f_N(x) \sin \frac{2\pi m x}{T} dx = b_m \frac{T}{2}.$$

Si $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq T} f_N(x) = f(x)$ alors on a $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

En effet $\left| \int_0^T f(x) dx - \frac{T a_0}{2} \right| = \left| \int_0^T (f(x) - f_N(x)) dx \right| \leq \int_0^T |f(x) - f_N(x)| dx \leq T \sup_{0 \leq x \leq T} |f(x) - f_N(x)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

- Si f est impaire ($f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$) alors
périodique de période T

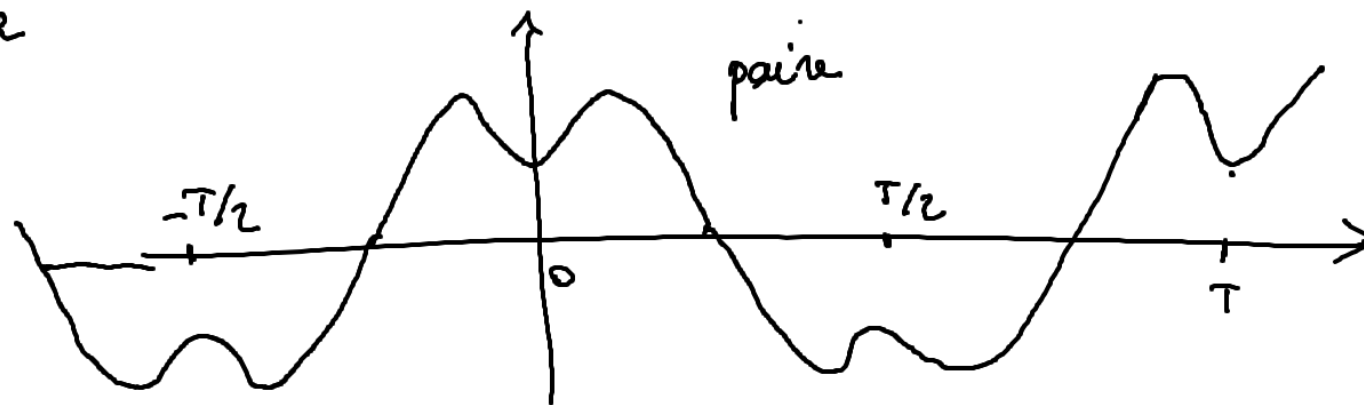
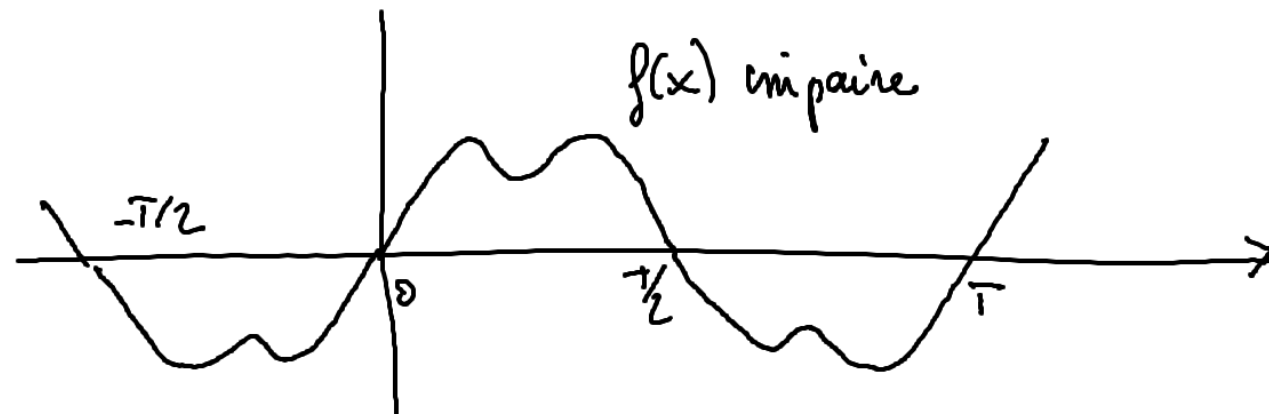
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{impaires}}} \underbrace{\sin \frac{2\pi n x}{T}}_{\substack{\uparrow \\ \text{paire}}} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{T} 2 \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx$$

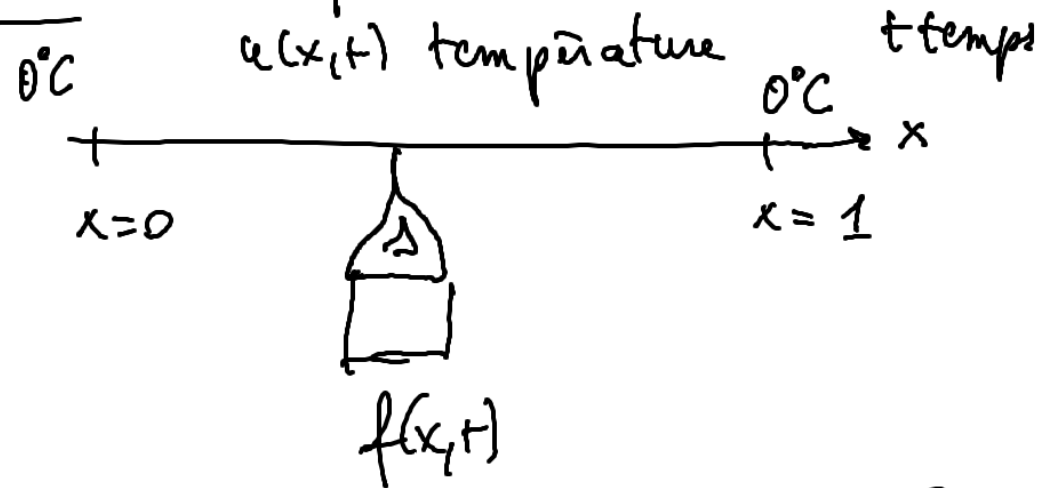
- Si f est paire ^{per. T} ($f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$) alors $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T}$ avec

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx \quad n=0, 1, 2, \dots$$



• L'équation de la chaleur (pas dans le livre)

Expérience:



Données: temp. à $t=0$ $u_0(x)$
 $f(x,t)$ source de chaleur

Inconnue: température $u(x,t)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & 0 < x < 1 \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0 & \text{cond. limites} \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{cond. initiale} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Remarques:

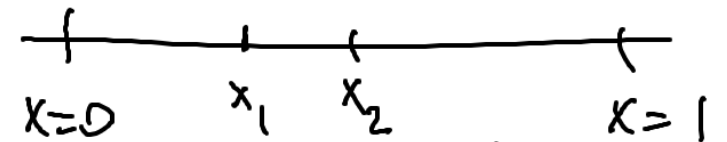
• Si $f(x,t) = 0$ et $u_0(x) = \sin(\pi x)$ alors
 $u(x,t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$

• L'éq. de la chaleur traduit un principe de conservation d'énergie.

Si on intègre l'éq. de la chaleur entre $x = x_1$ et $x = x_2$ on a:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x,t) dx$$

Var. au cours de t
énerg. therm.
flux de chaleur
=
puissance therm.



• La solution, si elle existe, est unique. En effet soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de la chaleur. On note $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ et on a

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ v(0,t) = 0 \quad v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

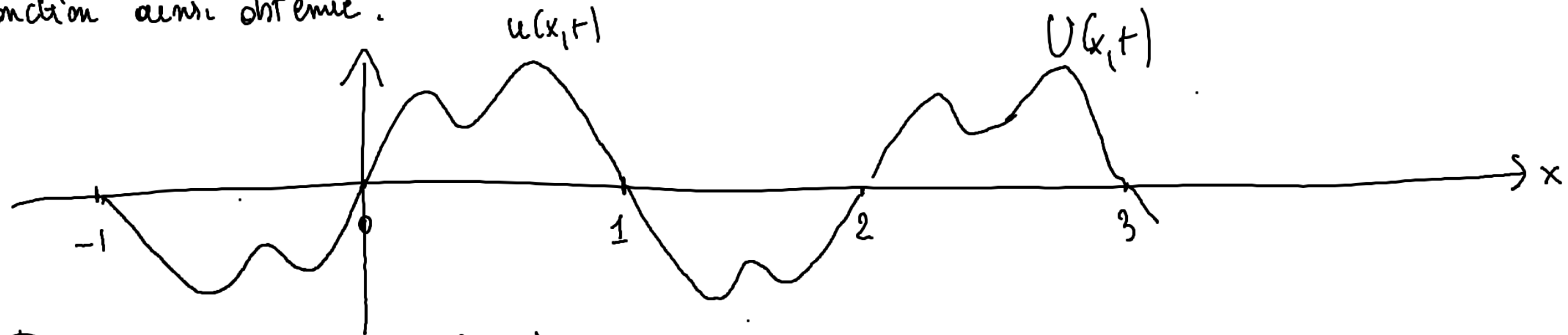
$\times v(x,t)$ on intègre entre $x=0$ et $x=1$ et on obtient:

$$\int_0^1 (v(x,t))^2 dx = 0$$

et donc $v(x,t) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall t \geq 0$
cf exercice

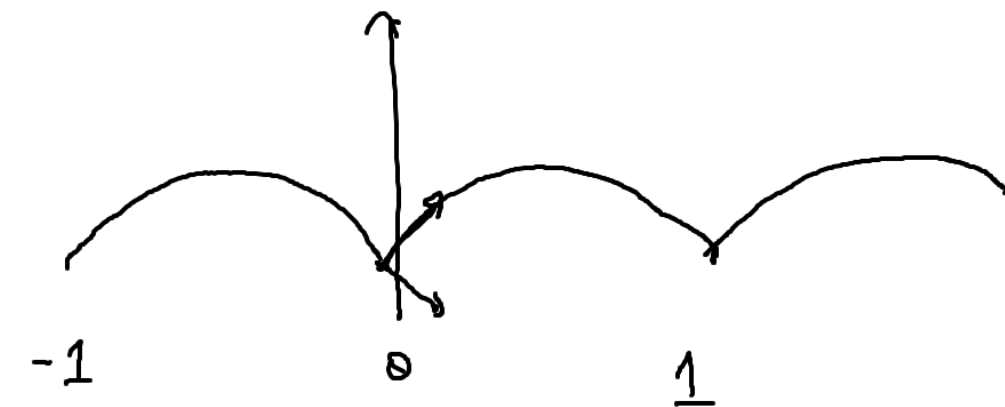
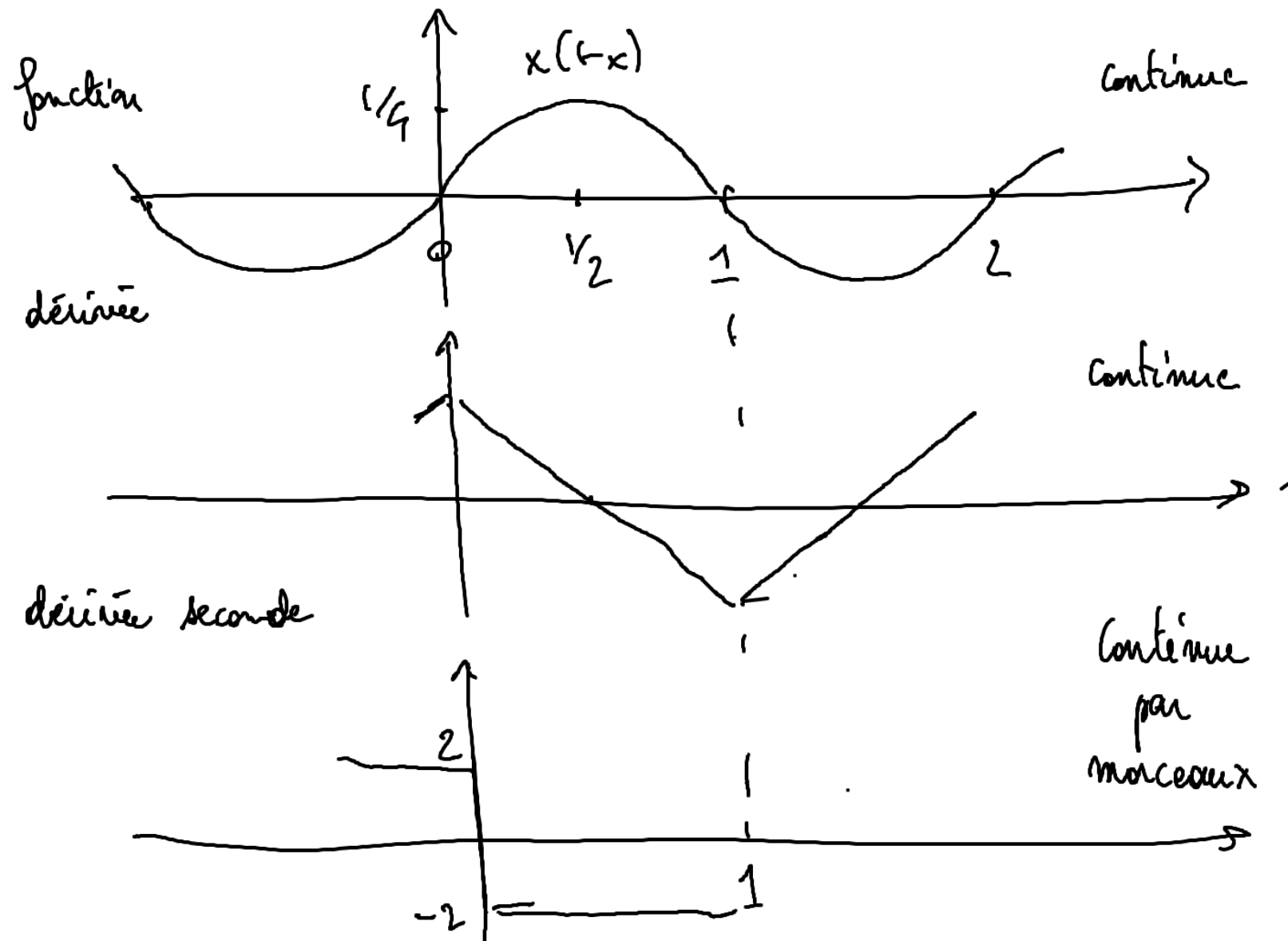
Résolution de l'éq. de la chaleur en utilisant les séries de Fourier

On prolonge $u(x,t)$ pour $x \in [-1,0]$ par imparité puis pour $x \in \mathbb{R}$ par 2-périodicité. On note $U(x,t)$ la fonction ainsi obtenue.



Idem pour $u_0(x) \rightarrow U_0(x)$ et $f(x,t) \rightarrow F(x,t)$

la fonction $U(x,t)$ ainsi obtenue est continue, de dérivée en espace sont continue, de dérivée seconde continue par morceaux :



Série de Fourier de $U(x,t)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x)$ $b_n(t)$ inconnus

$U_0(x)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} \sin(\pi n x)$ $b_{0n} = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(\pi n x) dx$ connus (calculables)

$F(x,t)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \sin(\pi n x)$ $\beta_n(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin(\pi n x) dx$ connus

$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \pi n \cos(\pi n x)$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) (-\pi^2 n^2) \sin(\pi n x)$

$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin(\pi n x)$

$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} (b'_n(t) + \pi^2 n^2 b_n(t)) \sin(\pi n x)$

On égale des coeff de la série de Fourier de $F(x,t)$ et $\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$: $b'_n(t) + \pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n(t)$ $\checkmark$
 $n=1, 2, \dots$

$U(x,0)$ et $U_0(x)$: $b_n(0) = b_{0n}$

Il s'agit de résoudre les eq. différentielles

$$\begin{cases} b'_n(t) + \pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n(t) & t > 0 \quad n=1, 2, \dots \\ b_n(0) = b_{on} \end{cases} \quad (\text{type } y' + ay = f)$$

qu'on peut résoudre en utilisant la transformée de Laplace. On trouve :

$$b_n(t) = b_{on} e^{-\pi^2 n^2 t} + \int_0^t \beta_n(s) e^{-\pi^2 n^2 (t-s)} ds$$

On a donc une formule explicite pour $U(x,t) \underset{0 \leq x \leq 1}{=} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x)$ pour $0 \leq x \leq 1$.

Cas particuliers :

• Si $f(x,t) = 0$ ($\beta_n(t) = 0$) et si $u_0(x) = \sin(\pi x)$ ($b_{o1} = 1$, $b_{on} = 0$ $n=2, 3, \dots$) alors $u(x,t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$

• Si $f(x,t) = \sin(\pi x)$ ($\beta_1(t) = 1$, $\beta_n(t) = 0$, $n=2, 3, \dots$) et $u_0(x) = 0$ ($b_{on} = 0$ $n=1, 2, 3, \dots$) alors

$$b_1(t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - e^{-\pi^2 t}) \quad \text{et donc} \quad u(x,t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - e^{-\pi^2 t}) \sin(\pi x)$$

la prochaine fois, eq. des ondes, puis transformée de Fourier
la série d'ex de cette semaine vaut pour la semaine prochaine.