

Chap 16 : Transformée de Laplace

Rappel Def 14.1 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux :

Def: 16.1 Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux
Si besoin est f est étendue à $\mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$ si $t < 0$

Soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t\gamma_0} dt < +\infty$ (1)

La transformée de Laplace de f est définie par

$$\mathcal{L}(f)(z) = F(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt$$

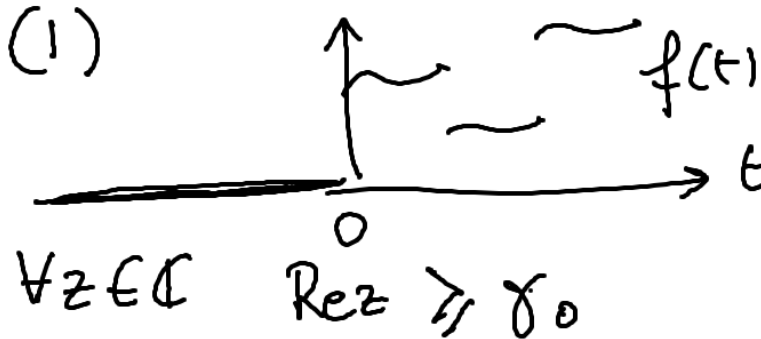
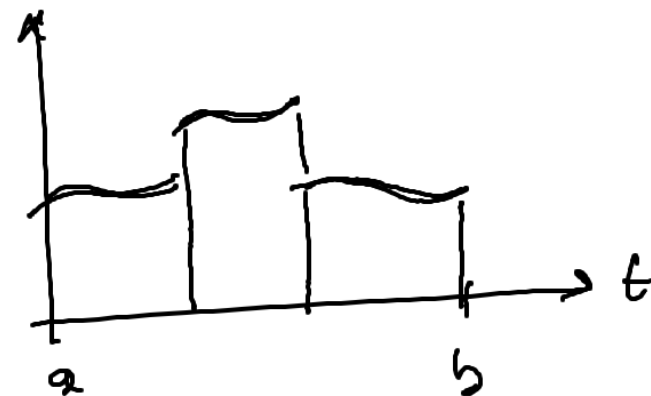
notation

définition

Remarques: • Ressemblance avec la transformée de Fourier définie $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (\text{si } f(t) = 0 \text{ } t < 0)$$

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t \operatorname{Re} z} e^{-it \operatorname{Im} z} dt = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(f(t) e^{-t \operatorname{Re} z} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-it \operatorname{Im} z} dt$$



• la transformée de Laplace est bien définie (f, γ_0 satisfaisant (1) et $\operatorname{Re} z > \gamma_0$). En effet

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}(f)(z) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t \operatorname{Re} z} e^{-it \operatorname{Im} z} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \underbrace{|e^{-t \operatorname{Re} z}|}_{e^{-t \operatorname{Re} z}} \underbrace{|e^{-it \operatorname{Im} z}|}_{=1} dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \end{aligned}$$

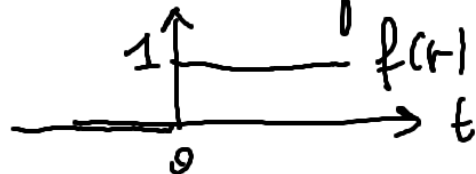
Si $\operatorname{Re} z > \gamma_0$ alors pour $t > 0$ $t \operatorname{Re} z > t \gamma_0$ $-t \operatorname{Re} z < -t \gamma_0$ $e^{-t \operatorname{Re} z} \leq e^{-t \gamma_0}$

$$\left| \mathcal{L}(f)(z) \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \gamma_0} dt < +\infty.$$

$\hat{=}$ hyp(1).

• γ_0 est appelée l'abscisse de convergence

Ex 1: $f(t) = 1 \quad t > 0$



$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} 1 e^{-tz} dt = -\frac{1}{z} \left[e^{-tz} \right]_{t=0}^{t=+\infty}$$

$z \neq 0$

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0$$

γ_0 ? (1) est satisfait $\forall \gamma_0 > 0$ $\operatorname{Re} z > \gamma_0 > 0$

$$= -\frac{1}{z} \left(\underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tz}}_{=0 \text{ si } \operatorname{Re} z > 0} - 1 \right) = -\frac{1}{z} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} - 1 \right)$$

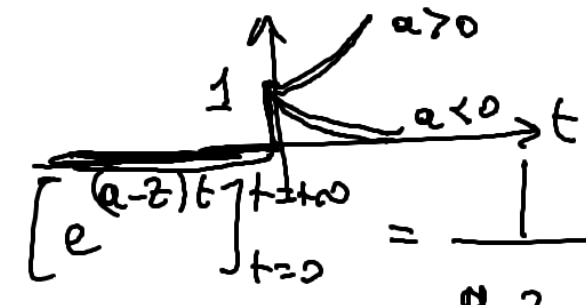
Ex 2: $f(t) = e^{at}$ $a \in \mathbb{R}$ ($f(t) = 0$ $t < 0$)

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-tz} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-z)t} dt = \frac{1}{a-z} \left[e^{(a-z)t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{a-z} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z))t} - 1 \right)$$

$z \neq a$

$= \frac{1}{z-a} \quad \operatorname{Re} z > a \quad (\text{si } a=0 \text{ on retrouve l'ex 1})$

$0 \text{ si } a - \operatorname{Re} z < 0$
ie $\operatorname{Re} z > a$



Théorème 16.2 i) Soient f et γ_0 ^{qui} satisfait (1) alors $z \rightarrow F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$ est holomorphe si $\operatorname{Re} z > \gamma_0$
et $F'(z) = \frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} \mathcal{L}(f)(z) = \frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz} dt$
 $= - \mathcal{L}(t f(t))(z)$

ii) Soient f, g et γ_0 ^{qui} satisfait (1), soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{L}(af + bg) = a \mathcal{L}(f) + b \mathcal{L}(g) \quad \text{linéarité}$$

$$\mathcal{L}(af + bg)(z) = \int_0^{+\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-tz} dt = a \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt + b \int_0^{+\infty} g(t) e^{-tz} dt \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > \gamma_0$$

Ex 3: Trouver f qui admet comme transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(z) = F(z) = \frac{1}{(z-b)(z-a)} \quad a \neq b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

déc. en éléments simples

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) = \frac{1}{b-a} \left(\mathcal{L}(e^{bt})_{(z)} - \mathcal{L}(e^{at})_{(z)} \right) \quad \operatorname{Re} z > \max(a, b) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} \right)(z) \quad \text{Donc } f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} \end{aligned}$$

iii) dérivée : soit $\bar{f}, \gamma_0$ qui satisfait (1). De plus $f \in \mathcal{C}'[0, +\infty[$ $\int_0^{+\infty} |f'(t)| e^{-t\gamma_0} dt < +\infty$. Alors on a

$$\mathcal{L}(f')(z) = z \mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

Ex 4: $f(t) = t \quad t \geq 0$  $f'(t) = 1 \quad t \geq 0$ $\frac{1}{z} = \mathcal{L}(f')(z) = z \mathcal{L}(f)(z) - 0 \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0$

donc $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z^2}$

Dém.: $\mathcal{L}(f')(z) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-tz} dt = - \int_0^{+\infty} f(t) (-z) e^{-tz} dt + \left[f(t) e^{-tz} \right]_{t=0}^{t=+\infty}$

Supposons que $f(t) e^{-t\gamma_0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

alors $\mathcal{L}(f')(z) = z \mathcal{L}(f)(z) + \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-t(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)}}_{=0} - f(0)$

iii) soit $n \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{C}^n [0, +\infty[$ $\int_0^{+\infty} |f^{(k)}(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < +\infty$ $k=0, 1, 2, \dots, n$

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - (z^{n-1} f(0) + z^{n-2} f'(0) + \dots + z^1 f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0))$$

Ex $n=2$ $\mathcal{L}(f'')(z) = z^2 \mathcal{L}(f)(z) - z f(0) - f'(0)$

Ex 5: $f(t) = t^2$ $f'(t) = 2t$ $f''(t) = 2$ $\mathcal{L}(f'')(z) = z^2$

$$\frac{2}{z^3} = \mathcal{L}(f'')(z) = z^2 \mathcal{L}(f)(z) - z \cdot 0 - 0 \quad \text{donc } \mathcal{L}(f)(z) = \frac{2}{z^3} \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$f(t) = t^n \quad \mathcal{L}(f)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Dém: $n=2$ $\mathcal{L}(f'')(z) = \int_0^{+\infty} f''(t) e^{-tz} dt = - \int_0^{+\infty} f'(t)(-z) e^{-tz} dt + \left[f'(t) e^{-tz} \right]_{t=0}^{t=+\infty}$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) e^{-t\gamma_0} = 0$

$$\mathcal{L}(f'')(z) = z \mathcal{L}(f')(z) - f'(0)$$

$$= z (z \mathcal{L}(f)(z) - f(0)) - f'(0) = z^2 \mathcal{L}(f)(z) - z f(0) - f'(0).$$

iv) intégration $f \in \mathcal{L}[0, +\infty[$ $\gamma_0 \geq 0$ (1) satisfaite

Soit $\Psi(t) = \int_0^t f(s) ds$ alors $\mathcal{L}(\Psi)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z}$ si $\operatorname{Re} z > \gamma_0$

Ex 6: $f(t) = 1$ $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}$ $\operatorname{Re} z > 0$

$= t$ $= \frac{1}{z^2}$

$= \frac{t^2}{2}$ $= \frac{1}{z^3}$

$\left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{dérivée} \\ \downarrow \end{array} \right\} \text{intégrer}$

Dém: $\Psi'(t) = f(t)$ $\mathcal{L}(\Psi')(z) = \mathcal{L}(f)(z)$

$z \mathcal{L}(\Psi)(z) - \underbrace{\Psi(0)}_0 = \mathcal{L}(f)(z)$

v) décalage f, γ_0 satisfait (1); soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $\Psi(t) = e^{-bt} f(at)$ alors

$\mathcal{L}(\Psi)(z) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{z+b}{a}\right)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} z \geq \gamma_0$

Ex: $\Psi(t) = e^{-bt} \cdot 1$ $f(t) = 1$ $a = 1$ on a vu (ex 2) $\mathcal{L}(\Psi)(z) = \frac{1}{z+b}$ $\operatorname{Re} z > -b$

la formule ci-dessus donne: $\mathcal{L}(\Psi)(z) = \frac{1}{1} \mathcal{L}(1)\left(\frac{z+b}{1}\right) = \frac{1}{z+b}$ qui est bien le résultat

vi) Convolution

Rappel: si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

si f, g sont telles que $f(t) = g(t)$ si $t < 0$ alors

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds \xrightarrow{\text{changement de variable } t-s=u} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds$$

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(s) g(t-s) ds = \int_0^t f(s) g(t-s) ds \xrightarrow{t-s=u} \int_0^t f(t-s) g(s) ds$$

$\uparrow$ $f(s) = 0$ si $s < 0$ $\uparrow$ $g(t-s) = 0$ si $t-s < 0$

Supposons f, g, γ_0 sont tels que (1) est satisfaite alors

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z)$$

Ex 3: trouver f telle que $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{(z-b)(z-a)}$ ($a \neq b, a, b \in \mathbb{R}$)

$$F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z-b} \cdot \frac{1}{z-a} = \mathcal{L}(e^{bt})(z) \cdot \mathcal{L}(e^{at})(z) \quad \text{Re } z > \max(a, b)$$

$$f(t) = e^{at} \int_0^t e^{(b-a)s} ds = \frac{e^{at}}{b-a} \left[e^{(b-a)s} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{e^{at}}{b-a} (e^{(b-a)t} - 1) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$$

$$f(t) = \int_0^t e^{bs} e^{a(t-s)} ds$$

Dém:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-tz} \int_0^t f(s) g(t-s) ds = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(s) g(t-s) e^{-tz} ds \right) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} f(s) g(t-s) e^{-tz} dt \quad \begin{array}{l} t-s = x \\ dt = dx \end{array} \\
 &= \int_0^{+\infty} ds \int_{-s}^{+\infty} f(s) g(x) e^{-(s+x)z} dx \quad \begin{array}{l} t=0 \quad x=-s \\ t=+\infty \quad x=+\infty \end{array} = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} f(s) g(x) e^{-(s+x)z} dx \\
 &= \underbrace{\int_0^{+\infty} f(s) e^{-sz} ds}_{\mathcal{L}(f)(z)} \underbrace{\int_0^{+\infty} g(x) e^{-xz} dx}_{\mathcal{L}(g)(z)} \\
 &= \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z)
 \end{aligned}$$

Application à la résolution des équations différentielles