

lundi 26 : possibilité de venir en présentiel aux exercices, par groupe 1/3

Formule d'inversion de la transf. de Laplace 16.3

$$f(t) \rightarrow F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt$$

eq. diff

table $F(z) \rightarrow f(t)$

$\mathcal{L}^{-1} F(z) \rightarrow f(t)$ by $\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$ sans passer par les tables?

Thm 16.3: $f: [0, +\infty[$ continue $f(0) = 0$ $f(t) = 0$ $t < 0$

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ by $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\gamma t} < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + is)| ds < +\infty$

Alors on a
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + is) e^{-(\gamma + is)t} ds$$



Dem: Formule d'inversion de la transformée de Fourier:

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty$

transformée de Fourier $\hat{g}(\alpha) = \mathcal{F}(g)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-it\alpha} dt$
 $\alpha \in \mathbb{R}$

De plus si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\alpha)| d\alpha < +\infty$ alors on a:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\alpha) e^{it\alpha} d\alpha$$

Il suffit de choisir $g(t) = f(t) e^{-\gamma t}$ pour obtenir $\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\gamma+i\alpha)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\gamma+i\alpha)$

On a donc $\underbrace{g(t)}_{f(t)e^{-\gamma t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\gamma+i\alpha) e^{it\alpha} d\alpha$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+i\alpha) e^{(\gamma+i\alpha)t} d\alpha$$

Exemple: Soit $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}$ trouver $f(t)$ tq $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$

- En utilisant la table 16.4 (2^e ed.) 16.5 (4^e ed.) - On décompose en éléments simples

$$F(z) = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z+2} + \frac{c}{(z+2)^2} \quad \text{on identifie et on trouve } F(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)^2}$$

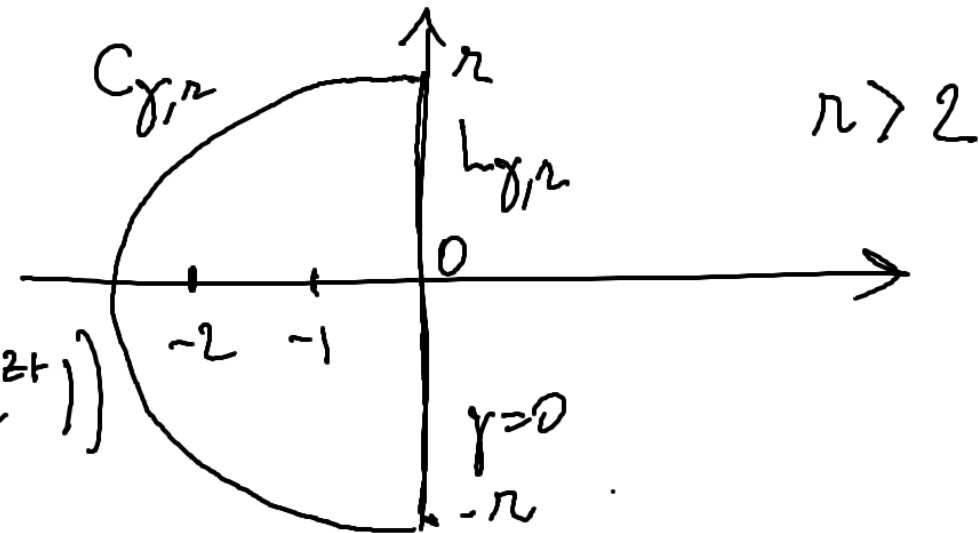
table 16.4 on trouve $f(t) = e^+ - e^{-2t} - t e^{-2t}$

- En utilisant le thm 16.3, la formule d'inversion et le théorème des résidus
On considère la fonction $F(z) e^{zt} = \frac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)^2}$ holomorphe sauf en $z = -1$ et $z = -2$

$z = -1$ pôle d'ordre 1

$z = -2$ ——— 2

Soit $\Gamma_{\gamma, r} = \Gamma_{\gamma, r} \cup C_{\gamma, r}$



Thm résidus :

$$\int_{\Gamma_{\gamma, r}} F(z) e^{zt} dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{-1} (F(z) e^{zt}) + \text{Res}_{-2} (F(z) e^{zt}) \right)$$

$$\int_{\Gamma_{r,n}} f(z) e^{zt} dz = \int_{C_{r,n}} f(z) e^{zt} dz + \int_{L_{r,n}} f(z) e^{zt} dz$$

On va d'ém que $\int_{C_{r,n}} f(z) e^{zt} dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ et donc $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{r,n}} f(z) e^{zt} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_{r,n}} f(z) e^{zt} dz$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-1} (f(z) e^{zt}) + \operatorname{Res}_{-2} (f(z) e^{zt}) \right)$$

Reste à faire:

- Calculer les 2 résidus

- $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_{r,n}} f(z) e^{zt} dz$

- montrer que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_{r,n}} f(z) e^{zt} dz = 0$

- utiliser la formule d'inversion $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \dots$ pour conclure.

$$\text{Res}_{-1} (F(z)e^{zt}) = \text{Res}_{-1} \left(\frac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -1} ((z+1) F(z)e^{zt}) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^{zt}}{(z+2)^2} = \frac{e^{-t}}{1^2} = e^{-t}$$

$$F(z)e^{zt} = \frac{c_{-1}}{z+1} + c_0 + c_1(z+1) + c_2(z+1)^2 \quad z = -1 \text{ pole d'ordre } 1,$$

$$(z+1) F(z)e^{zt} = c_{-1} + c_0(z+1) + c_1(z+1)^2 \xrightarrow{z \rightarrow -1} c_{-1} = \text{Res}_{-1} (F(z)e^{zt})$$

$$\text{Res}_{-2} (F(z)e^{zt})$$

$$F(z)e^{zt} = \frac{c_{-2}}{(z+2)^2} + \frac{c_{-1}}{z+2} + c_0 + c_1(z+2) + c_2(z+2)^2 + \dots$$

$$(z+2)^2 F(z)e^{zt} = c_{-2} + c_{-1}(z+2) + c_0(z+2)^2 + \dots$$

$$\frac{d}{dz} ((z+2)^2 F(z)e^{zt}) = c_{-1} + c_0 2(z+2) + c_1 3(z+2)^2 + \dots \xrightarrow{z \rightarrow -2} c_{-1} = \text{Res}_{-2} (F(z)e^{zt})$$

$$\text{Res}_{-2} (F(z)e^{zt}) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{zt}}{z+1} \right) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{t e^{zt} (z+1) - e^{zt}}{(z+1)^2} = -t e^{-2t} - e^{-2t}$$

$$\int_{\Gamma_{r,n}} F(z) e^{zt} dz = 2\pi i (e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})$$

$$\int_{\Gamma_{r,n}} F(z) e^{zt} dz = \int_{-n}^n F(\gamma + is) e^{(\gamma + is)t} i ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + is) e^{(\gamma + is)t} ds$$

param $\gamma + is$ $-n \leq s \leq n$

$2\pi f(t)$

Si on peut montrer que $\int_{C_{r,n}} F(z) e^{zt} dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors on a $2\pi i f(t) = 2\pi i (e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})$,

$$\int_{C_{r,n}} F(z) e^{zt} dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{n(\cos\theta + i\sin\theta)t}}{(re^{i\theta} + 1)(re^{i\theta} + 2)^2} i n e^{i\theta} d\theta, \text{ donc } \left| \int_{C_{r,n}} F(z) e^{zt} dz \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{n\cos\theta t} e^{i n \sin\theta t}}{|re^{i\theta} + 1| \cdot |re^{i\theta} + 2|^2} |i| \cdot n |e^{i\theta}| d\theta$$

param $\gamma + ne^{i\theta}$ $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{n\cos\theta t} n}{|re^{i\theta} + 1| \cdot |re^{i\theta} + 2|^2} d\theta \text{ avec } e^{i n \sin\theta t} \leq 1$$

$$r = |re^{i\theta}| = |re^{i\theta} + 1 - 1| \leq |re^{i\theta} + 1| + \underbrace{|-1|}_{1}$$

$$r-1 \leq |re^{i\theta} + 1|$$

$$\frac{1}{|re^{i\theta} + 1|} \leq \frac{1}{r-1} \quad \text{de même} \quad \frac{1}{|re^{i\theta} + 2|} \leq \frac{1}{(r-2)^2}$$

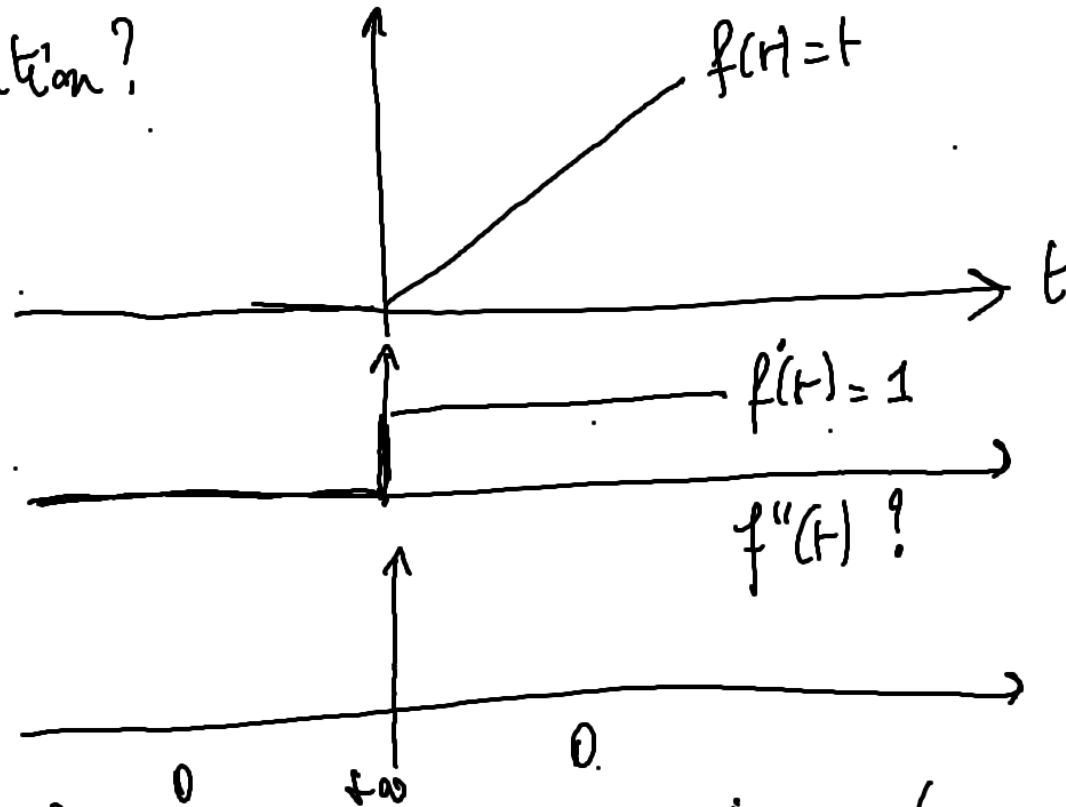
$$\left| \int_{C_{r/2}} F(z) e^{zt} \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{r}{(r-1)(r-2)^2} d\theta = \pi \frac{r}{(r-1)(r-2)^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

On a bien démontré que $f(t) = e^{-t} - e^{-2t} - t e^{-2t}$

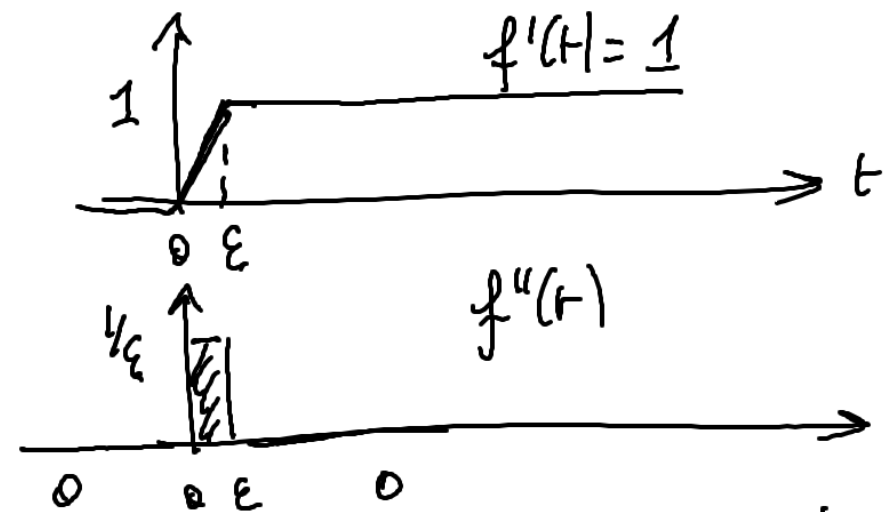
Transformée de Laplace des distributions

- distributions
- transformées de Laplace et distributions
- eq. diff du type: $y' + ay = \delta$ impulsion de Dirac

δ ? distribution?



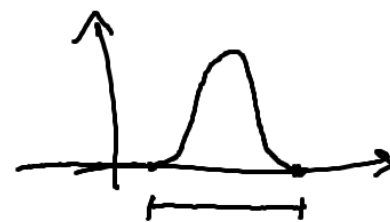
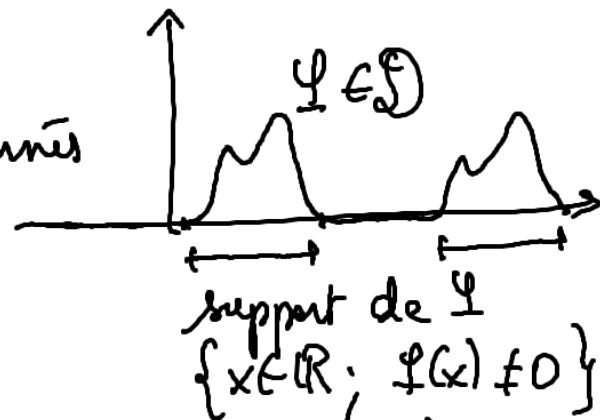
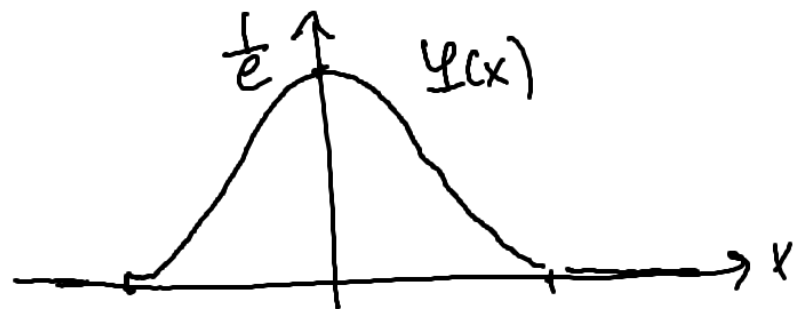
régularisation $\varepsilon \rightarrow 0$



Ce n'est plus une fonction, c'est une distribution (impulsion de Dirac, force ponctuelle, distribution)

- $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact
réunion de formes bornées

Ex: $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ si $-1 < x < 1$
 $= 0$ sinon



$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{1-x^2} \right) e^{-\frac{1}{1-x^2}} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm 1} 0$$

φ : fonction test, aussi régulière qu'on veut.

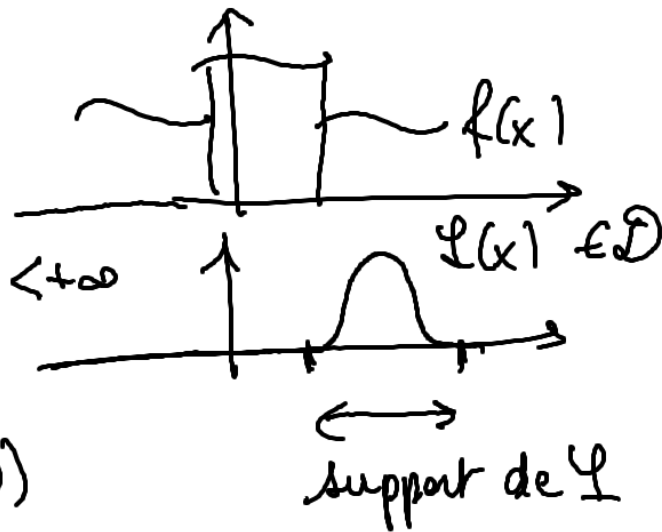
- $\mathcal{D}'$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}$ (l'espace des distributions)

$f \in \mathcal{D}'$ on dit que f est une distribution
 f est une forme sur $\mathcal{D}$: $\langle f, \varphi \rangle < +\infty$
 f est linéaire : $\langle f, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle + b\langle f, \psi \rangle$
 f est continue : "si φ varie peu, $\langle f, \varphi \rangle$ varie peu"

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

Ex: • f continue par morceaux

on définit $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx < +\infty$



• δ définie par $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$

forme: $\langle \delta, \varphi \rangle < +\infty$

linéaire: $\langle \delta, a\varphi + b\psi \rangle = a\varphi(0) + b\psi(0) = a\langle \delta, \varphi \rangle + b\langle \delta, \psi \rangle$

