

Chap 11 : séries de Laurent

Chap 12 : théorème des résidus

Série de Taylor dans $\mathbb{C}$

D simplement connexe, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $z_0 \in D$

Soit R tel que $B_R(z_0) \subset D$, $\forall z \in B_R(z_0)$ on a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$$

avec

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}} d\alpha$$

où γ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux) telle que $z_0 \in \text{int} \gamma$



Ex:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C}$$

$$\forall z \text{ tq } |z| < 1$$

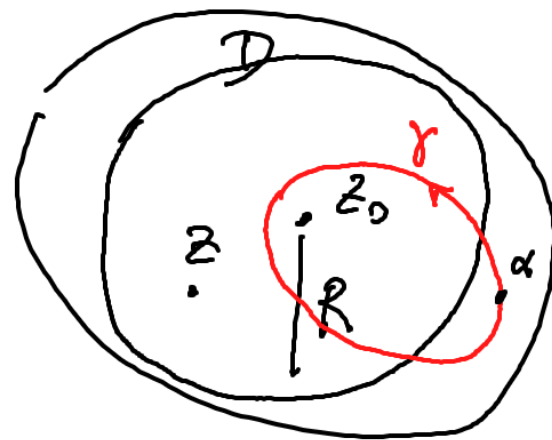
Thm 11.1: Série de Laurent

D simplement connexe, $z_0 \in D$, $f: D \setminus \{z_0\}$ holomorphe,
Soit R tel que $B_R(z_0) \subset D$, $\forall z \in B_R(z_0)$ on a:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\dots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots}_{\text{partie régulière}}$$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}} d\alpha$ où γ est une courbe simple fermée rég (morceaux)
tq $z_0 \in \text{int } \gamma$.

Def: $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\alpha) d\alpha = \text{Res}_{z_0}(f)$ "résidu de f en z_0 "



Ex1: Si $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$, la partie singulière est nulle $c_n = 0 \quad n < 0$, on dit que z_0 est un point régulier.

Ex2: $f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0 \quad f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe $z_0 = 0$
 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ avec $c_{-1} = 1 \quad c_n = 0 \quad n \neq -1$

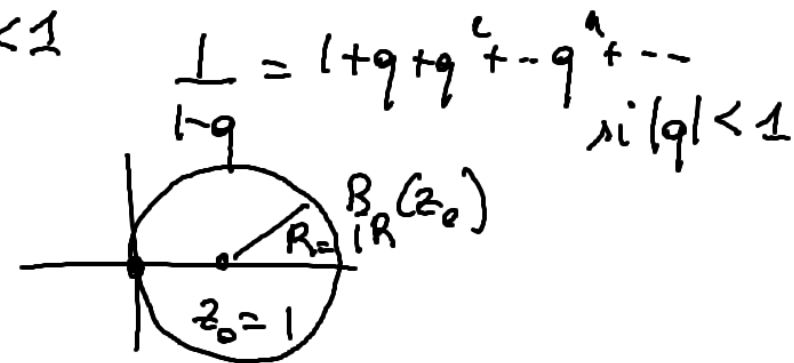
On dit que $z_0 = 0$ est pôle d'ordre 1
Ex3: $f(z) = \frac{1}{z} \quad z_0 = 1 \quad f(z) = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z)^n$ si $|1-z| < 1$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

$$= 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots$$

pas de partie singulière, $z_0 = 1$ est un point régulier

Ex4: $f(z) = \frac{1}{z^2} \quad z \neq 0 \quad z_0 = 0 \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$
 $z_0 = 0$ pôle d'ordre 2.



$$c_{-2} = 1 \quad c_n = 0 \quad n \neq -2$$

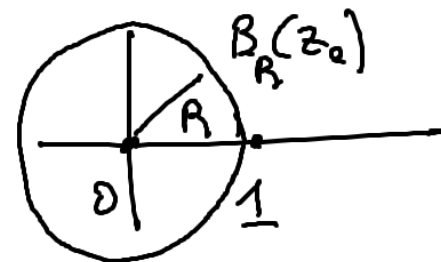
Ex 5: $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$ $z_0 = 0$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ $c_{-2} = 1$ $c_{-1} = 2$ $c_n = 0$ si $n \neq -2$ et $n \neq -1$

Ex 6: $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ $z_0 = 0$ $\hat{\text{pôle d'ordre 2.}}$ $\text{dec. en éléments simples}$ $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-(-z)}$
 $= \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n$ si $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n \text{ si } |z| < 1$$

$$= \frac{1}{z} (1 - z + z^2 - \dots) = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \dots$$



Ex 7: $f(z) = e^{1/z}$ $z \neq 0$ $z_0 = 0$ $f: \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe $\text{terme le plus singulier}$ $\text{pôle d'ordre 1 en } z_0 = 0$
 $f(z) = \underbrace{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots}_{\text{partie singulière}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ $\forall z \neq 0$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{partie rég.}}$

Ex 8: $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$ pas de partie irrégulière

$z_0 = 0$ est un point régulier.

$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$ $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1

Def: z_0 pôle d'ordre m si $f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$ $\neq 0$

Prop 11.4: Si z_0 est un pôle d'ordre m alors $c_{-1} = \text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$

Dem: $m=1, 2, 3$

$\underline{m=1}$ $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$

$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots \xrightarrow{z \rightarrow z_0} c_{-1}$

$$\underline{m=2}: \quad f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + c_1(z-z_0)^3$$

$$\frac{d}{dz} \left((z-z_0)^2 f(z) \right) = c_{-1} + 2c_0(z-z_0) + 3c_1(z-z_0)^2 \xrightarrow{z \rightarrow z_0} c_{-1}$$

$$\underline{m=3}: \quad f(z) = \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$(z-z_0)^3 f(z) = c_{-3} + c_{-2}(z-z_0) + c_{-1}(z-z_0)^2 + c_0(z-z_0)^3 + \dots$$

$$\frac{d}{dz} \left(\quad \right) = c_{-2} + 2c_{-1}(z-z_0) + 3c_0(z-z_0)^2$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\quad \right) = 2c_{-1} + 6c_0(z-z_0) + \dots \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 2c_{-1}$$

Ex: $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2}$ $z_0 = 2$ pôle d'ordre 2

$$(z-2)^2 f(z) = e^z$$

$$\frac{d}{dz} \left((z-2)^2 f(z) \right) = e^z \xrightarrow{z \rightarrow 2} e^2 = \text{Res}_2(f)$$

On aurait pu faire : $f(z) = \frac{e^{z+z-2}}{(z-2)^2} = e^2 \frac{e^{z-2}}{(z-2)^2} = e^2 \frac{1 + (z-2) + \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^3}{3!} + \dots}{(z-2)^2}$

$$= e^2 \left(\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} + \frac{z-2}{3!} + \dots \right)$$

Ex: $f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2}$ $z_0 = i$

$$(z-i)f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)}$$

$$\xrightarrow{z \rightarrow z_0 = i} \frac{\sin i}{2i} = \text{Res}_i(f)$$

$$\sin i = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{1 - e}{2i} \neq 0 \quad z_0 \text{ pôle d'ordre 1}$$

Chap 12 : Théorème des résidus et applications

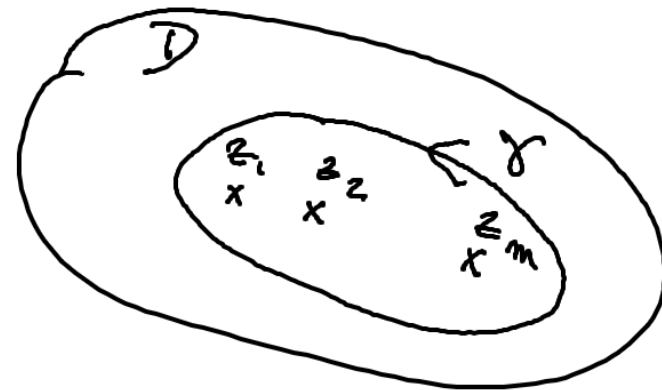
Thm 12.1 : $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe
 γ courbe simple fermée régulière (morceaux) $\subset D$

$$z_1, z_2, \dots, z_m \in \text{int} \gamma$$

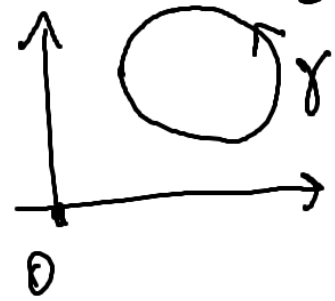
$f: D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ holomorphe

Alors
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z_1}(f) + \text{Res}_{z_2}(f) + \dots + \text{Res}_{z_m}(f) \right)$$

Remarque : si $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ (thm Cauchy)



Ex: $f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$



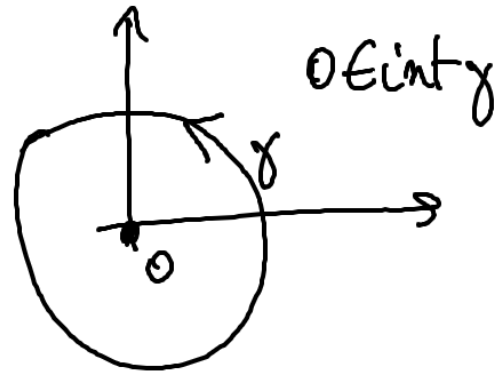
si $0 \notin \text{int } \gamma$

thm Cauchy

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_{-1} = 1 \quad c_n = 0 \quad n \neq -1$$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sqrt{2\pi i} \text{Res}_0(f) = 2\pi i \cdot 1$$

On a déjà obtenu ce résultat avec la formule intégrale de Cauchy (thm 10.2)

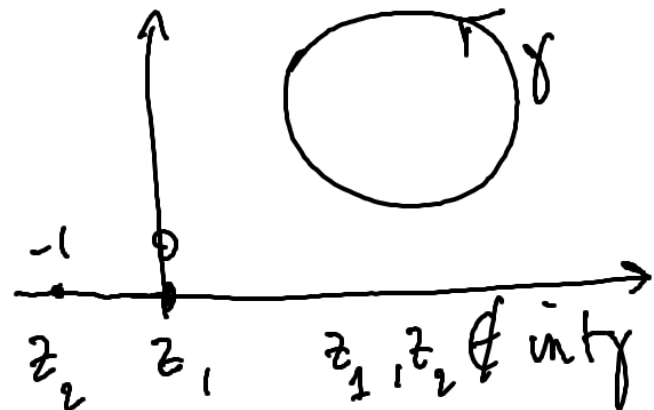
Ex: $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$

$$z_1 = 0$$

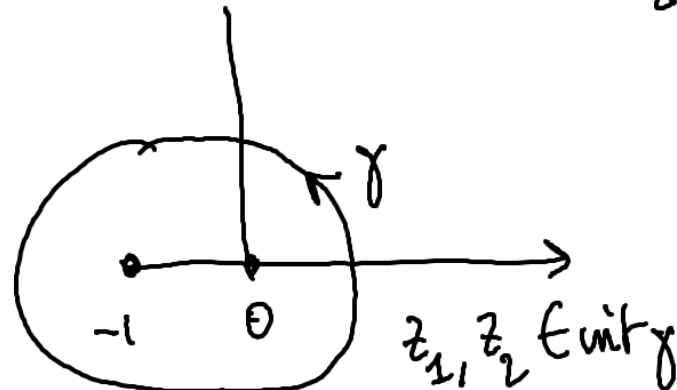
$$z_2 = -1$$

$$\text{Res}_0(f) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z+1} = 1$$

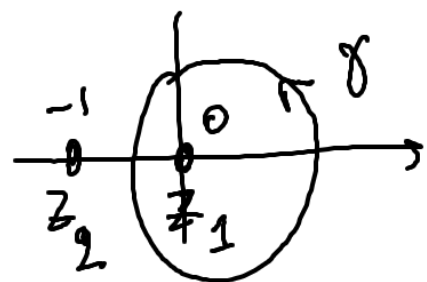
$$\text{Res}_{-1}(f) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z} = -1$$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

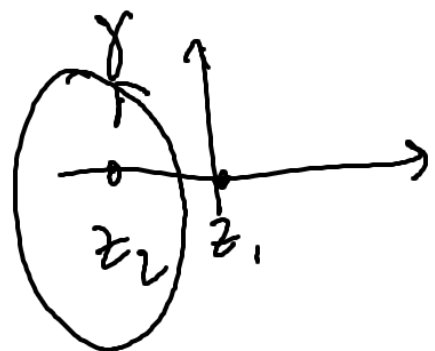


$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}_0(f) + \text{Res}_{-1}(f)) \\ &= 2\pi i (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$



$0 \in \text{int } \gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_0(f) = 2\pi i$$



$-1 \in \text{int } \gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{-1}(f) = -2\pi i$$

si γ passe par z_1 ou z_2 , l'intégrale est mal définie

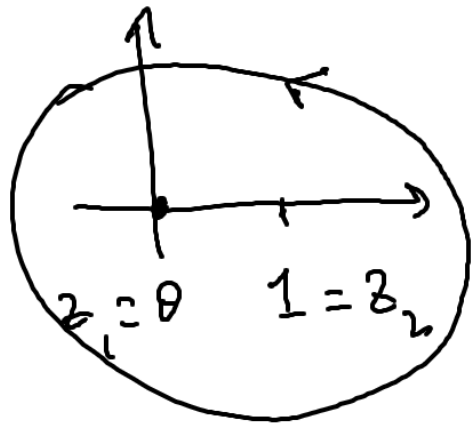
Ex: $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}$

$z_1 = 0$
 $z_2 = 1$

pole d'ordre 2
 pole d'ordre 1

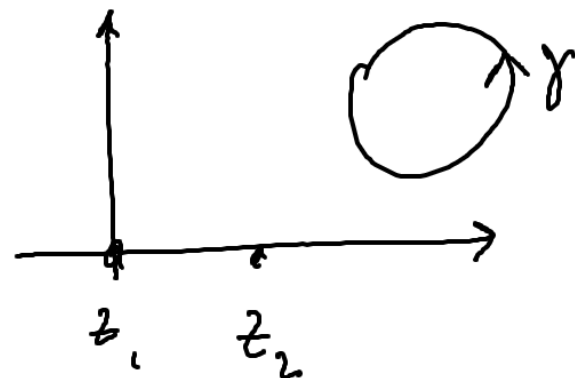
$\text{Res}_0(f) = 2$

$\text{Res}_1(f) = 3$

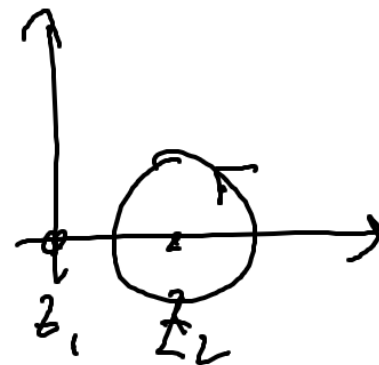


$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}_0(f) + \text{Res}_1(f))$$

$$= 2\pi i \cdot 5$$



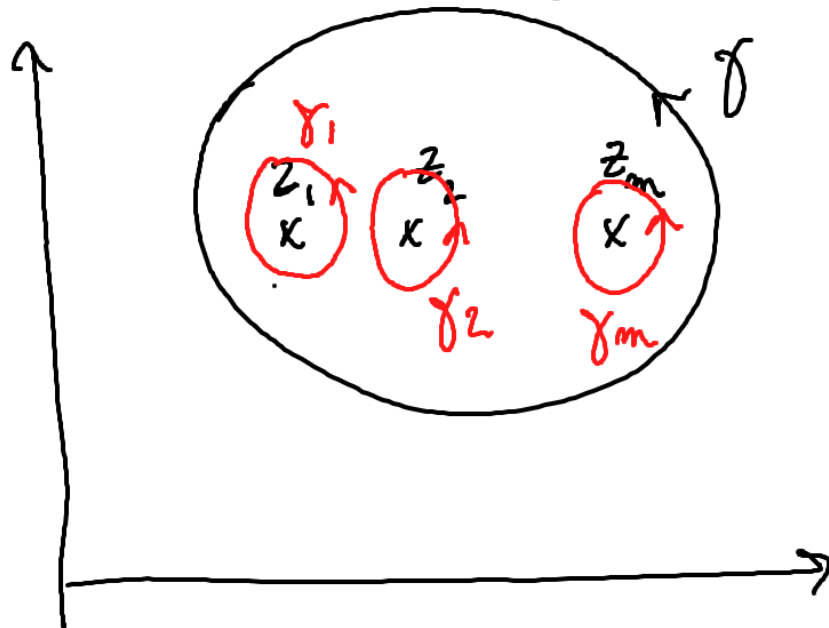
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot 3$$

Dém thm résidus:

Corollaire thm de Cauchy



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_m} f(z) dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \operatorname{Res}_{z_2}(f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(f) \right) \end{aligned}$$