

Chap 6 : transformée de Laplace

Résoudre des eq. diff.

$$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow f(t)$$



$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt \quad \text{Si } \exists \gamma_0 \in \mathbb{R} \text{ tq}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < +\infty \quad \text{alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ bien défini pour } \operatorname{Re} z \geq \gamma_0$$

• $z \rightarrow F(z)$ holomorphe

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & \mathcal{L}(f)(z) &= F(z) = \frac{1}{z} & \operatorname{Re} z > 0 \\ f(t) &= e^{at} & F(z) &= \frac{1}{z-a} & \operatorname{Re} z > a \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(af + bg)(z) = a\mathcal{L}(f)(z) + b\mathcal{L}(g)(z)$$

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f'')(z) = z^2\mathcal{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0)$$

$$g(t) = \int_0^t f(s) ds$$

$$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{z} \mathcal{L}(f)(z)$$

$$f(t) = 1$$

$$f(t) = t$$

$$f(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$f(t) = \frac{t^3}{6}$$

$$F(z) = \frac{1}{z}$$

$$F(z) = \frac{1}{z^2}$$

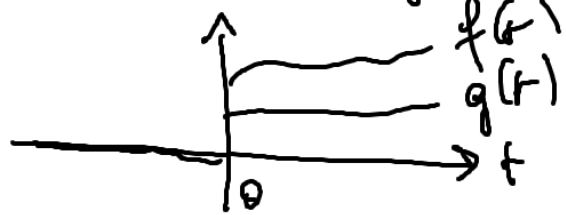
$$F(z) = \frac{1}{z^3}$$

$$F(z) = \frac{1}{z^4}$$

- $\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(f))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-bt} \underbrace{f(at)}_s e^{-tz} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(s) e^{-s \frac{z+b}{a}} ds = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{z+b}{a}\right)$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) g(u) du$



$$= \int_0^t f(s) g(t-s) ds = \int_0^t f(t-u) g(u) du$$

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z)$$

Résol. d'eq. diff :

les calculs sont formels, seul le résultat compte.

Exemple 1: Soit $a \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ cont. par morceaux, on cherche $y: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) + a y(t) = f(t) & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Remarque: la solution, si elle existe est unique. En effet soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux solutions, on a:

$$y_1'(t) + a y_1(t) = f(t)$$

$$y_2'(t) + a y_2(t) = f(t)$$

$$y_1(t) - y_2(t) = z(t)$$

$$\begin{cases} z'(t) + a z(t) = 0 & t \geq 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

$z(t) = 0$ est solution, est-ce la seule?

On multiplie $z'(t) + a z(t)$ par $z(t) e^{2at}$, on a: $z'(t) z(t) e^{2at} + a (z(t))^2 e^{2at} = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left((z(t))^2 e^{2at} \right) = \frac{1}{2} \left(2 z(t) z'(t) + (z(t))^2 2a \right) e^{2at} = 0$$

On intègre entre $t=0$ et $t=T$: $(z(T))^2 e^{2aT} = (z(0))^2 e^{2a \cdot 0} = 0$ (T est quelconque)

donc $(z(T))^2 = 0 \quad \forall T \in \mathbb{R} \quad z(t) = 0$

Donc $y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ la solution est unique

$$y'(t) + a y(t) = f(t)$$

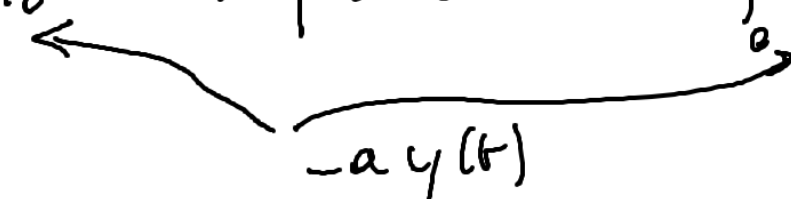
On applique la transformée de Laplace, on note $Y(z) = \mathcal{L}(y)(z)$
 $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$

$$zY(z) - y(0) + aY(z) = F(z)$$

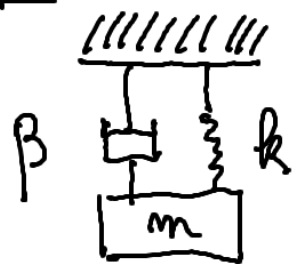
$$\mathcal{L}(y)(z) = Y(z) = \frac{y_0}{z+a} + \frac{F(z)}{z+a} = y_0 \mathcal{L}(e^{-at})(z) + \underbrace{\mathcal{L}(f)(z) \mathcal{L}(e^{-at})(z)}_{\mathcal{L}(f * e^{-at})}$$

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(s) e^{-a(t-s)} ds$$

Vérification : $y(0) = y_0$ $y'(t) = -ay_0 e^{-at} + f(t) e^{-a(t-t)} + \int_0^t f(s) (-a) e^{-a(t-s)} ds$


 $-ay(t)$

Exemple 2: Système masse-ressort-amortisseur



Eq. Newton
↓ $y(t)$

$$m y''(t) = -k y(t) - \beta y'(t)$$

$$y''(t) = - \underbrace{\frac{k}{m}} y(t) - \underbrace{\frac{\beta}{m}} y'(t)$$

$$\begin{cases} y''(t) = -\omega^2 y(t) - 2\alpha y'(t) & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{L}(y)(z) = Y(z)$$

$$z^2 Y(z) - z y(0) - y'(0) = -\omega^2 Y(z) - 2\alpha (z Y(z) - y(0))$$

$$(z^2 + \omega^2 + 2\alpha z) Y(z) = z y_0 + 2\alpha y_0 + v_0$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= y_0 \frac{z}{z^2 + \omega^2 + 2\alpha z} + \frac{2\alpha y_0 + v_0}{z^2 + \omega^2 + 2\alpha z} \\ &= y_0 \frac{z + \alpha - \alpha}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{2\alpha y_0 + v_0}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

Si $\omega^2 - \alpha^2 > 0$

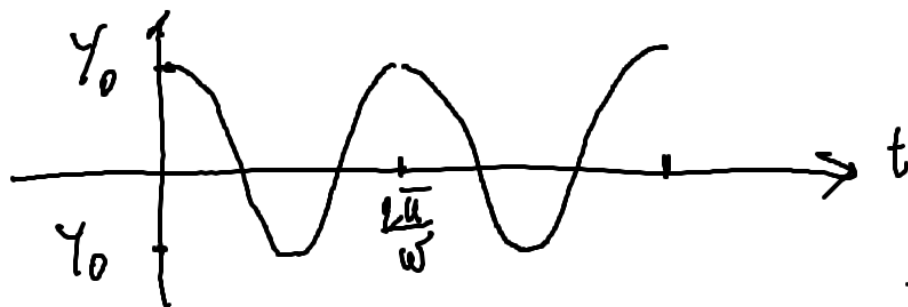
Table 16.4 : $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cos(\omega t)) = \frac{z - \alpha}{(z - \alpha)^2 + \omega^2}$ $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \sin(\omega t)) = \frac{\omega}{(z - \alpha)^2 + \omega^2}$
 $\alpha \rightarrow -\alpha$ et $\omega^2 \rightarrow \omega^2 - \alpha^2$

$\mathcal{L}(e^{-\alpha t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t)) = \frac{z + \alpha}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$ $\mathcal{L}(e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t)) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$

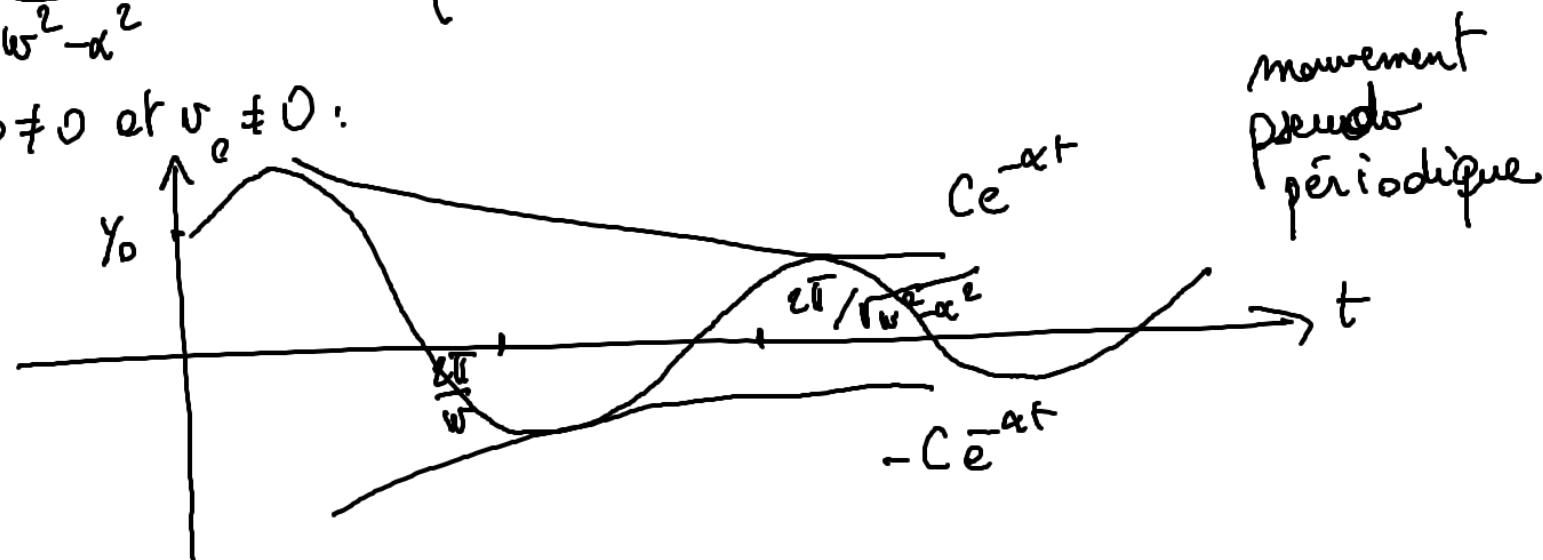
Donc $\mathcal{L}(y)(z) = y_0 \mathcal{L}(e^{-\alpha t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t)) + \frac{\alpha y_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \mathcal{L}(e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t))$

$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t) + \frac{\alpha y_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t)$

Si $\beta = 0$ et $v_0 = 0$ $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$



Si $\beta \neq 0$ et $v_0 \neq 0$:



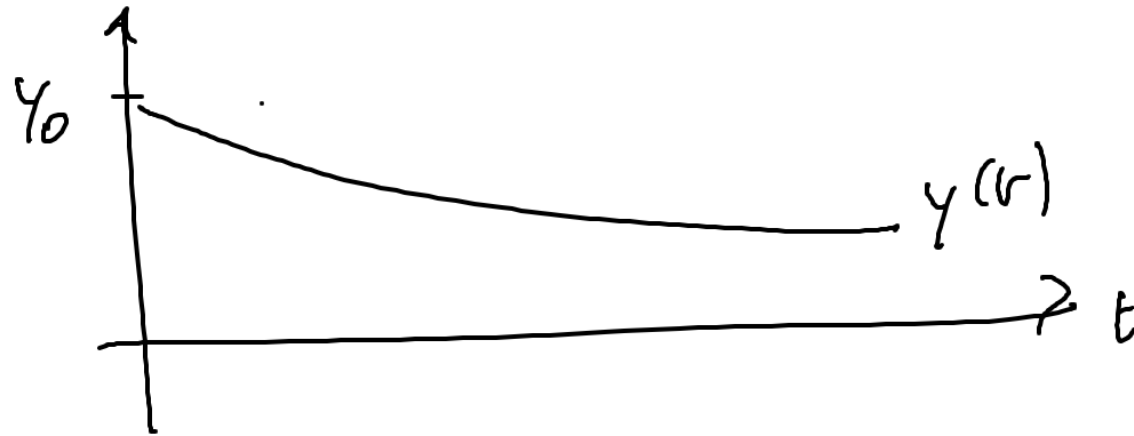
$$\text{Si } w^2 - \alpha^2 = 0$$

$$Y(z) = Y_0 \frac{z + \alpha - \alpha}{(z + \alpha)^2} + \frac{2\alpha Y_0 + v_0}{(z + \alpha)^2} = Y_0 \frac{1}{z + \alpha} + \frac{\alpha Y_0 + v_0}{(z + \alpha)^2}$$

$$\text{Table 16.4} \quad \mathcal{L}(e^{-\alpha t}) = \frac{1}{z + \alpha} \quad \mathcal{L}(te^{-\alpha t}) = \frac{1}{(z + \alpha)^2}$$

$$\mathcal{L}(y)(z) = Y(z) = Y_0 \mathcal{L}(e^{-\alpha t}) + (\alpha Y_0 + v_0) \mathcal{L}(te^{-\alpha t})$$

$$y(t) = e^{-\alpha t} (Y_0 + (\alpha Y_0 + v_0)t)$$



Si $\omega^2 - \alpha^2 < 0$ ($\alpha^2 - \omega^2 > 0$)

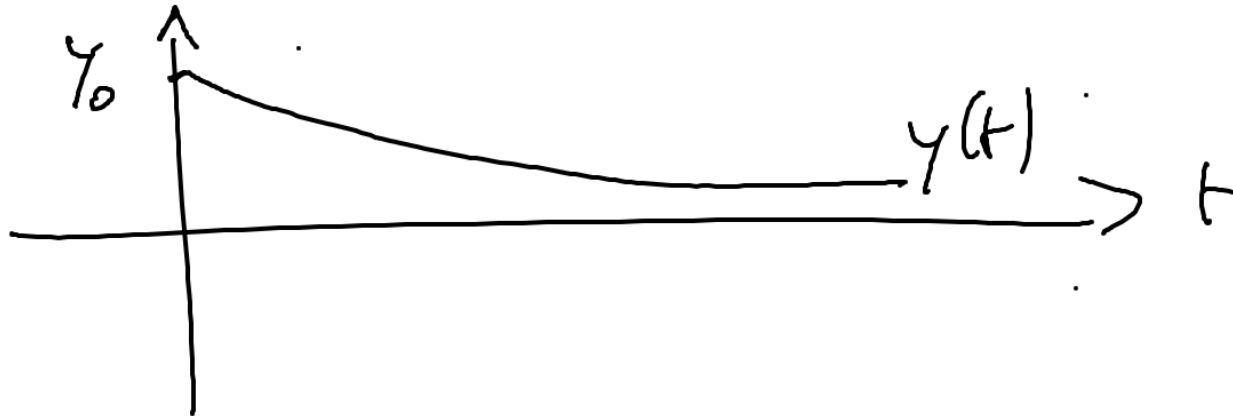
$$Y(z) = Y_0 \frac{z + \alpha - \alpha}{(z + \alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)} + \frac{2\alpha Y_0 + \omega_0}{(z + \alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)}$$

Table 16.4 $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cosh(\omega t)) = \frac{z - \alpha}{(z - \alpha)^2 - \omega^2}$ $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \sinh(\omega t)) = \frac{\omega}{(z - \alpha)^2 - \omega^2}$

$\alpha \rightarrow -\alpha$ $\omega^2 \rightarrow \alpha^2 - \omega^2$

$$\mathcal{L}(y)(z) = Y(z) = Y_0 \mathcal{L}(e^{-\alpha t} \cosh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t)) + \frac{\alpha Y_0 + \omega_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \mathcal{L}(e^{-\alpha t} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t))$$

$$y(t) = Y_0 e^{-\alpha t} \cosh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t) + \frac{\alpha Y_0 + \omega_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} e^{-\alpha t} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t)$$



Ici aussi, la solution est unique. De plus, on peut montrer que

$$\underbrace{(y'(t))^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\omega^2 (y(t))^2}_{\text{énergie élastique}} \leq \underbrace{(\dot{y}_0)^2 + \omega^2 (y_0)^2}_{\substack{\text{dissipation, perte d'énergie dans l'amortisseur}}}$$

énergie
cinétique

énergie
élastique

dissipation, perte d'énergie dans l'amortisseur

L'eq. diff est

$$y''(t) + \omega^2 y(t) + 2\alpha y'(t) = 0$$

on multiplie par $y'(t)$

$$y''(t) y'(t) + \omega^2 y(t) y'(t) + 2\alpha (y'(t))^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left((y'(t))^2 + \omega^2 (y(t))^2 \right) \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\underbrace{(y'(t))^2 + \omega^2 (y(t))^2}_{\text{énergie cin. + élastique}} \right) + \underbrace{2\alpha (y'(t))^2}_{\text{énergie dissipée dans l'amortisseur} \geq 0} = 0$$

donc $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left((y'(t))^2 + \omega^2 (y(t))^2 \right) \leq 0$ on intègre entre $t=0$ et $t=T$ (quel conque)

$$(y'(T))^2 + \omega^2 (y(T))^2 \leq (y'(0))^2 + \omega^2 (y(0))^2$$

On peut aussi montrer l'unicité: soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux solutions

$$y_1''(t) + \omega^2 y_1(t) + 2\alpha y_1'(t) = 0$$

$$y_2''(t) + \omega^2 y_2(t) + 2\alpha y_2'(t) = 0$$

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

$$\begin{cases} z''(t) + \omega^2 z(t) + 2\alpha z'(t) = 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

$z(t) = 0$ sol. triviale, la seule?

On multiplie par $z'(t)$: $z''(t)z'(t) + \omega^2 z(t)z'(t) + 2\alpha (z'(t))^2 = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left((z'(t))^2 + \omega^2 (z(t))^2 \right) \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left((z'(t))^2 + \omega^2 (z(t))^2 \right) + \text{---} = 0$$

En intégrant entre $t=0$ et $t=T$ on obtient

$$(z'(T))^2 + \omega^2 (z(T))^2 \leq (z'(0))^2 + \omega^2 (z(0))^2 = 0$$

$$z(t) = 0 \quad \forall T \geq 0$$

Reste à faire, pour la transformée de Laplace :

- Formule d'inversion $F(z) = \text{quelque chose} \rightarrow \text{table 16.4} \quad f(t)$
Il existe une formule (comme il en existe une pour la transformée de Fourier)
- Transformée de Laplace des distributions

Ensuite :

- Résoudre des eq aux dérivées partielles avec les séries de Fourier et les transformées de Fourier.