

Séries de Fourier et EDP

- Eq. chaleur
- Eq. ondes

Transformée de Fourier et EDP

- Eq. chaleur
 - Eq. ondes
-

Eq. ondes

Corde élastique tendue, lâchée à $t=0$: corde vibrante

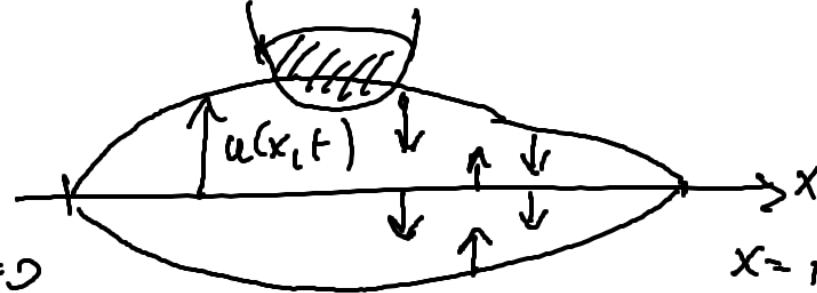
données : $f(x,t)$: force exercée au pt x instant t $x \in]0,1[$

$u_0(x)$: déformation initiale

$v_0(x)$: vitesse de déformation initiale

$c > 0$ vitesse de propagation

inconnue $u(x,t)$: déformation de la corde telle que



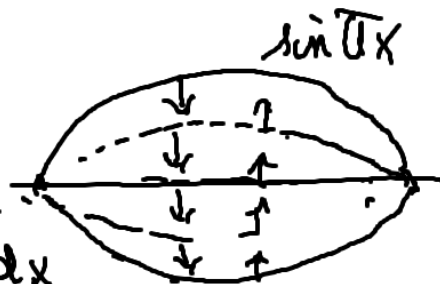
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & 0 < x < 1, t > 0; \text{ eq. ondes} \\ u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0 & t > 0 \text{ Conditions aux limites (corde pincée } x=0 \text{ et } x=1) \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 < x < 1 \text{ cond. initiale} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & \text{" "} \end{cases}$$

Remarques : • Si $f(x,t) = 0$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $v_0(x) = 0$ alors $u(x,t) = \sin(\pi x) \cos(\pi c t)$
 • L'eq. des ondes traduit un principe de conservation : eq. ondes $\times \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $\int dx$

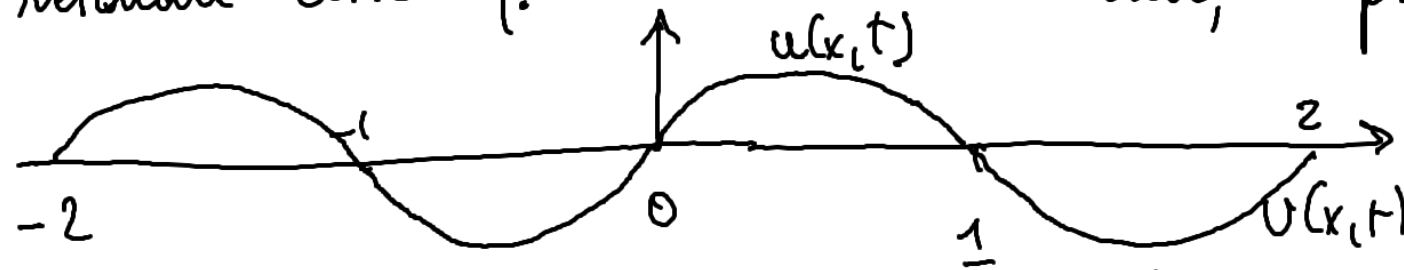
$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 \right) dx = \int_0^1 f(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx$$

En. cinétique En. déformation Puissance forces

Conséquence : la solution, si elle existe, est unique



Pour résoudre cette eq. avec les séries de Fourier, on procède comme pour l'eq. de la chaleur



$u(x,t)$ est prolongée par une parité sur $[-1, 0]$ puis par 2 périodicité sur $\mathbb{R}$. On note $U(x,t)$ la fonction ainsi obtenue.

Série de Fourier de	$U(x,t)$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x)$	$b_n(t)$ inconnus
	$U_0(x)$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} \sin(\pi n x)$	$b_{0n} = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{x}{2}} u_0(x) \sin(\pi n x) dx$
	$V_0(x)$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} \sin(\pi n x)$	$c_{0n} = 2 \int_0^1 v_0(x) \sin(\pi n x) dx$
	$F(x,t)$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \sin(\pi n x)$	$\beta_n(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin(\pi n x) dx$
	$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n''(t) + c^2 \pi^2 n^2 b_n(t)) \sin(\pi n x)$	

On identifie les séries de Fourier de F et $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$:

	$U(x,0)$ et $U_0(x)$	:	$b_n''(t) + c^2 \pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n(t)$	$n = 1, 2, \dots, +\infty$
	$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)$ et $V_0(x)$	:	$b_n(0) = b_{0n}$	
		:	$b_n'(0) = c_{0n}$	

Pour chaque n , il s'agit de résoudre une eq. diff du 2^e ordre à coeff constants

On peut résoudre ce système en utilisant la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(b_n)(z) = \frac{\mathcal{L}(\beta_n)(z) + z b_{0n} + c_{0n}}{z^2 + c^2 \pi^2 n^2} \quad n=1, 2, \dots$$

la solution est donnée par

$$b_n(t) = b_{0n} \cos(\pi c n t) + \frac{c_{0n}}{c \pi n} \sin(\pi c n t) + \frac{1}{c \pi n} \int_0^t \beta_n(s) \sin(c \pi n (t-s)) ds$$

Cas particuliers :

• Si $f(x,t)=0$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $v_0(x)=0$, $U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} \sin(\pi n x)$ avec $b_{01}=1$ $b_{0n}=0$ $n=2, 3, \dots$

$$b_1(t) = \cos(\pi c t) \quad b_n(t)=0 \quad n=2, 3, \dots \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x) = \cos(\pi c t) \sin(\pi x)$$

• Si $f(x,t)=0$, $u_0(x)=0$, $v_0(x) = \sin(\pi x)$, $b_1(t) = \frac{\sin(\pi c t)}{\pi c}$, $u(x,t) = \frac{\sin(\pi x) \sin(\pi c t)}{\pi c}$

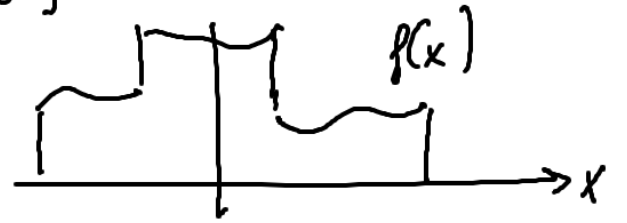
• Si $f(x,t) = \sin(\pi x)$, $u_0(x)=0=v_0(x)$, $b_1(t) = \frac{1 - \cos(\pi c t)}{\pi^2 c^2}$, $u(x,t) = \frac{1 - \cos(\pi c t)}{\pi^2 c^2} \sin(\pi x)$

Transformées de Fourier et EDP

- Rappels sur les transformées de Fourier (Chap 15 livre Dacorogna - Tartar)

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. la transformée de Fourier de f en $\alpha \in \mathbb{R}$ est def. par

$$\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$



- Propriétés utiles

• Si f est $\mathcal{C}^1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$ alors $\mathcal{F}(f')(\alpha) = i\alpha \mathcal{F}(f)(\alpha)$ (dém. intégration par parties)

• Si f est $\mathcal{C}^n$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx < +\infty$ $k=1,2,\dots,n$ alors $\mathcal{F}(f^{(n)})(\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}(f)(\alpha)$

• On définit $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$, on a

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\alpha) \cdot \mathcal{F}(g)(\alpha) \quad (\text{attention } \sqrt{2\pi}!)$$

• la transformée de Fourier inverse est définie par (f continue et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < +\infty$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

• Résolution du pbm de la chaleur

$\xrightarrow{\text{température } u(x,t)} x$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{cond. init } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Remarque; • Pas de conditions aux limites mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)| dx < +\infty$$

• Si $f(x,t)=0$ $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$ Si $u_0(x) = e^{-x^2}$ alors $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}$

On pose $\hat{u}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\alpha x} dx$ (t est un paramètre)

$$\hat{f}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-i\alpha x} dx$$

$$\hat{u}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) e^{-i\alpha x} dx$$

On applique la transformée de Fourier à l'éq de la chaleur:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-i\alpha x} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\alpha, t) - \underbrace{-(i\alpha)^2}_{+\alpha^2} \hat{u}(\alpha, t) = \hat{f}(\alpha, t) \quad \text{eq. diff. pour } \alpha \text{ fixe}$$

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(s) e^{-a(t-s)} ds$$

Condition initiale

$$\hat{u}(\alpha, 0) = \hat{u}_0(\alpha)$$

$\hat{u}(\alpha, t)$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\alpha, t) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha, t) = f(\alpha, t) & t > 0 \\ \hat{u}(\alpha, 0) = \hat{u}_0(\alpha) \end{cases} \quad \text{eq. diff à } \alpha \text{ fixe}$$

Donc $\hat{u}(\alpha, t) = \hat{u}_0(\alpha) e^{-\alpha^2 t} + \int_0^t f(\alpha, s) e^{-\alpha^2(t-s)} ds$ α paramètre.

Tables Chap 15 $e^{-w^2 x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2}w} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$ $t = \frac{1}{4w^2}$ $w^2 = \frac{1}{4t}$ $w = \frac{1}{\sqrt{4t}}$

$$\hat{u}_0(\alpha) e^{-\alpha^2 t} = \mathcal{F}(u_0)(\alpha) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left(u_0 * e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

Solution $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t f(\alpha, s) e^{-\alpha^2(t-s)} ds e^{i\alpha x} d\alpha$

Si $u_0(x) = e^{-x^2}$