

Chap 10 : Théorème de Cauchy (10.2 line)

Corollaire du thm de Cauchy

Formules intégrales de Cauchy

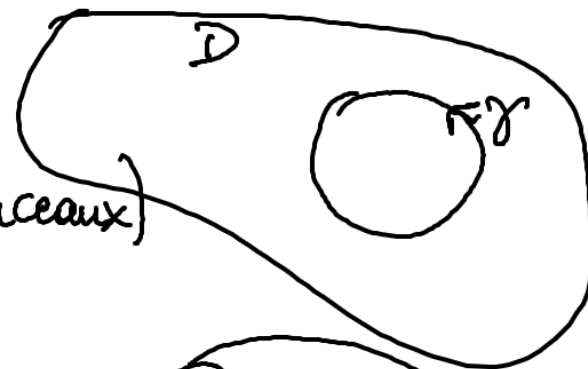
Chap 11 : série de Laurent, série de Taylor

Thm de Cauchy D simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$

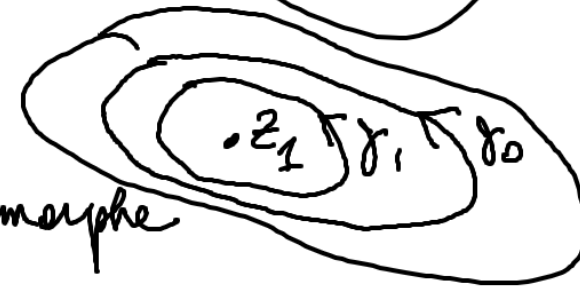
$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe

γ courbe simple fermée régulière (par morceaux)

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \gamma \subset D$$



Corollaire: D simpl. connexe, $z_1 \in D$
 γ_1 courbe simple fermée régulière $\hookrightarrow z_1 \in \text{int } \gamma_1$
 γ_0 courbe simple fermée régulière $\hookrightarrow z_1 \in \text{int } \gamma_0$
 $f: D \setminus \{z_1\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe



Ex: $f(z) = \frac{1}{z - z_1}$

Alas ma : $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$

γ_0 et γ_1 bien orientés dans le sens trigon.

$f: D \setminus (\{z_1\} \cup \{z_2\}) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe

$z_1 \in \text{int } \gamma_1$ $z_2 \in \text{int } \gamma_2$ $\text{int } \gamma_1 \cap \text{int } \gamma_2 = \emptyset$

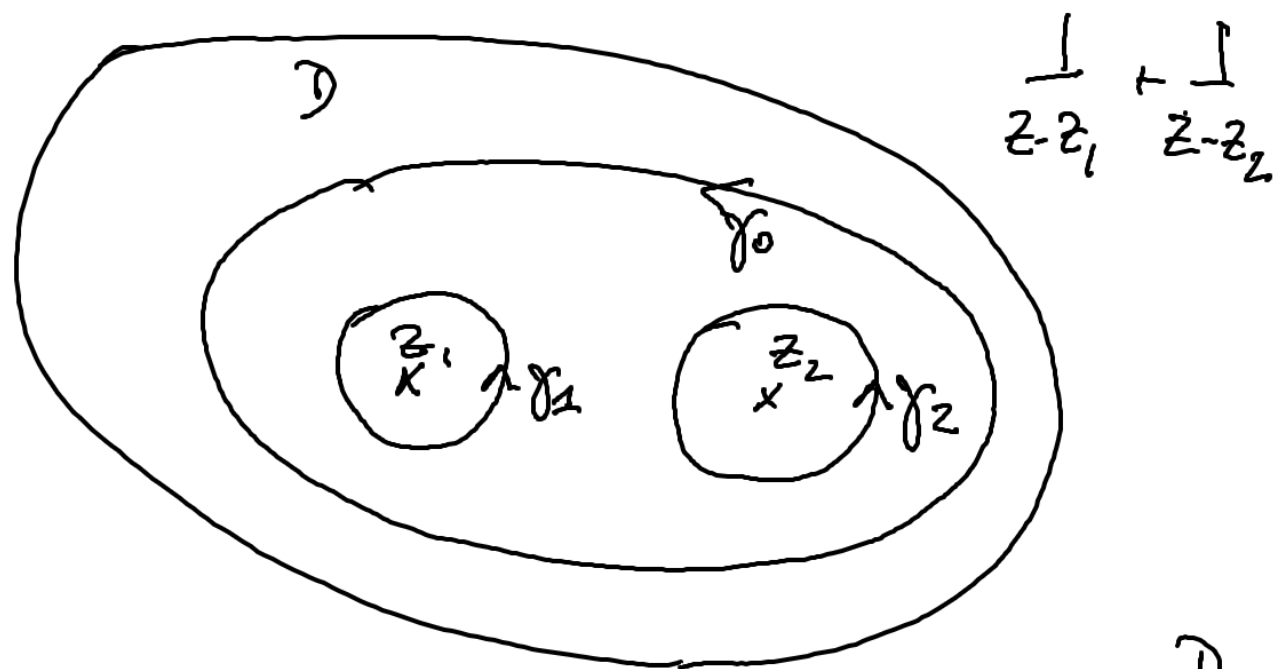
$\gamma_1 \subset \text{int } \gamma_0$ $\gamma_2 \subset \text{int } \gamma_0$

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

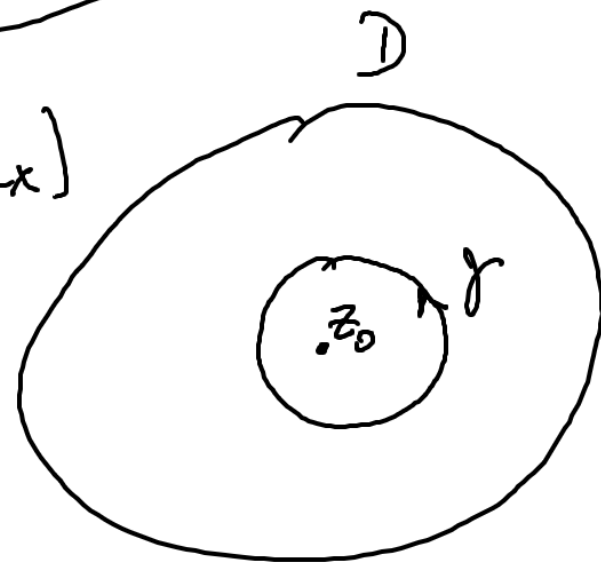
Thm 10.2 (formule intégrale de Cauchy) $D \subset \mathbb{C}$ simpl. connexe
 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe $\gamma \subset D$ courbe simple fermée régulière (morceaux)

Soit $z_0 \in \text{int } \gamma$, on a:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{ligne } n=0)$$

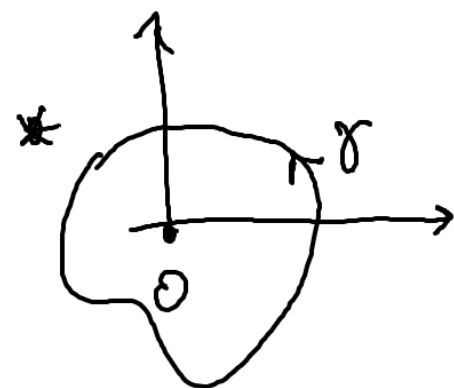


$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2}$$



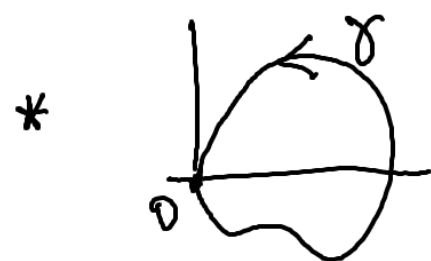
Ex: γ courbe simple fermée, discuter en fct de γ $\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz$

3 cas: $\ast$  $0 \notin \text{int } \gamma$, $z \rightarrow \frac{\cos 2z}{z}$ holomorphe dans $\text{int } \gamma$
thm de Cauchy: $\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 0$



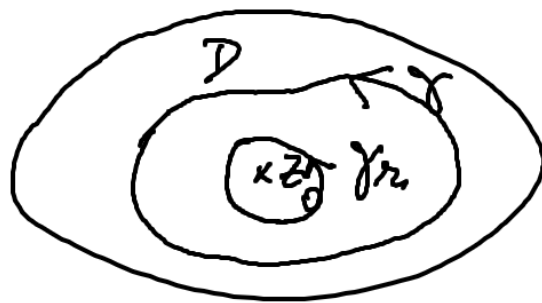
$0 \in \text{int } \gamma$, formule intégrale de Cauchy $f(z) = \cos 2z$ (holomorphe dans $\mathbb{C}$)
 $z_0 = 0$ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz$

et donc $\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i$



si $0 \in \gamma$ l'intégrale n'est pas bien définie.

Dém: D'après le corollaire :



γ_r : cercle de centre z_0 et de rayon r
 r petit de sorte que $\gamma_r \subset \text{int } \gamma$
 (r va tendre vers 0)

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

γ_r : paramétrisation $\gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} i r e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} i f(z_0) 2\pi \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

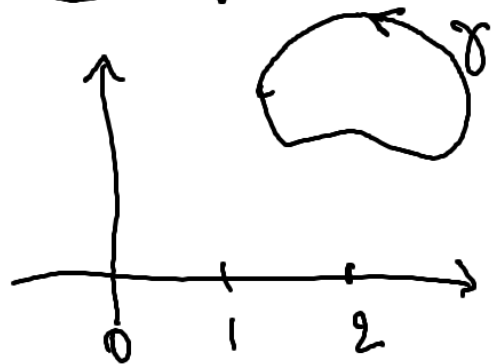
Formule intégrale de Cauchy, suite et fin (10.2)

$D \subset \mathbb{C}$ simpl. connexe, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\gamma \subset D$ simple fermée reg. (morceaux)
 $f^{(n)}$ existe $n=1, 2, \dots$ (toutes les dérivées existent!) et $\forall z_0 \in \text{int} \gamma$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Ex: γ cercle de centre 0 et rayon 1 $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz \stackrel{z_0=0, n=1, f(z)=1}{=} 2\pi i f'(0) = 0$

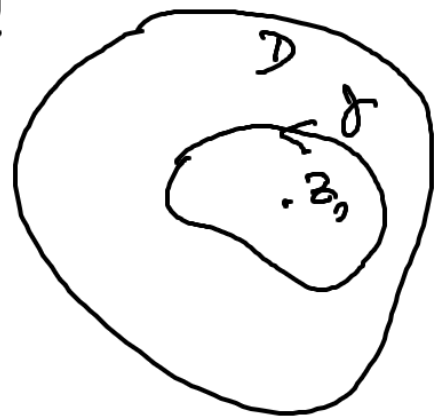
Ex: γ courbe simple fermée, discuter en fct de $\gamma \int_{\gamma} \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}$

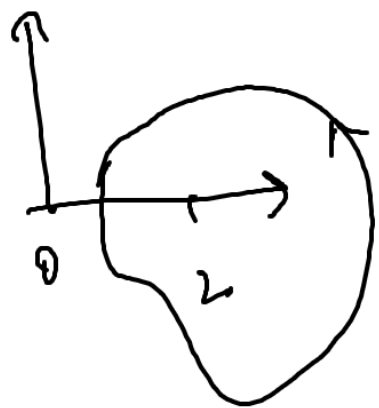


Si $2 \notin \text{int} \gamma$

$$z \rightarrow \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}$$

holomorphe dans $\text{int} \gamma$: $\int_{\gamma} \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz = 0$





Si $z \in \text{int } \gamma$ formule int de Cauchy $n=2$ $z_0=2$ $f(z)=e^{z+2}$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = \pi i e^4$$

Dem: On sait que $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

On dérive à gauche et à droite par γ rapport à z_0 :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{d}{dz_0} \frac{1}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

$$\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \varepsilon) - f(z_0)}{\varepsilon} \right)$$

On dérive encore une fois : $f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz$ etc...

Chap II Séries de Taylor, séries de Laurent

Séries de Taylor dans $\mathbb{R}$: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$)

• développement de Taylor en x_0 : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(\theta x + (1-\theta)x_0)$ où $0 < \theta < 1$

• Série de Taylor ^{de f} en x_0 : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ ^{si f est $\mathcal{C}^3$}

Question: a-t-on $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$? si f est $\mathcal{C}^{\infty}$

• ovi si $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$

$1 - x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$ Si $|x| < 1$ $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• mon si $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ $f(x) = 0$ si $x \leq 0$

$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$



Série de Taylor dans $\mathbb{C}$: (Thm 11.1 + remarque avant proposition 11.3)

D simplement connexe $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, soit $z_0 \in D$

Soit R tel que $B_R(z_0) = \{z; |z - z_0| < R\} \subset D$ et soit $z \in B_R(z_0)$, on a:

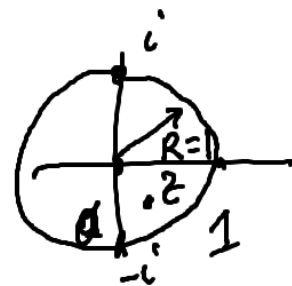
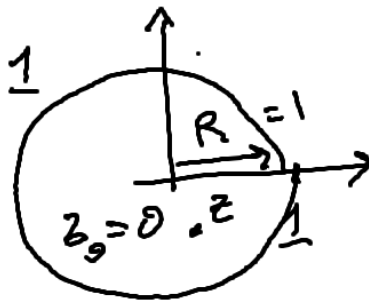
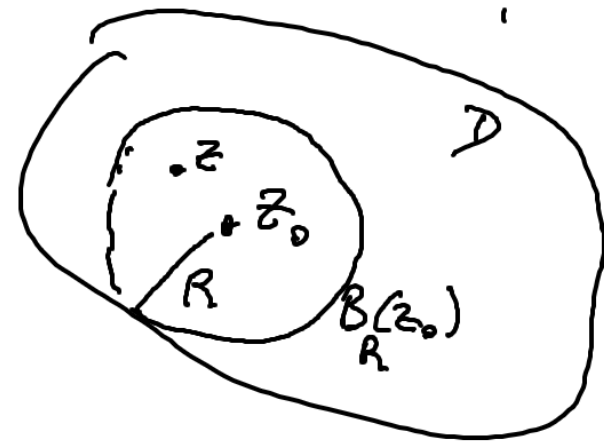
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Ex: $f(z) = e^z$ holomorphe dans $\mathbb{C}$, $R = +\infty$, pour $z_0 = 0$, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

• $f(z) = \frac{1}{1-z} \quad z_0 = 0 \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall |z| < 1$

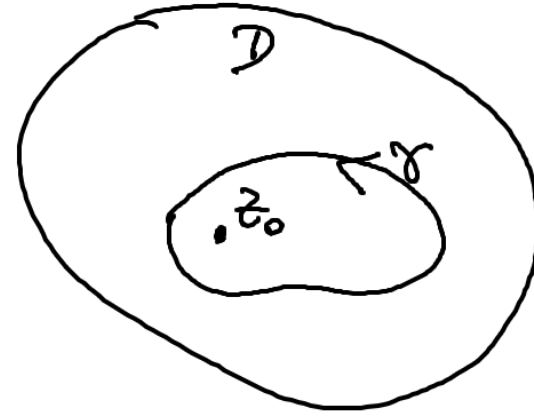
• $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad z_0 = 0 \quad \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \forall |z| < 1$$

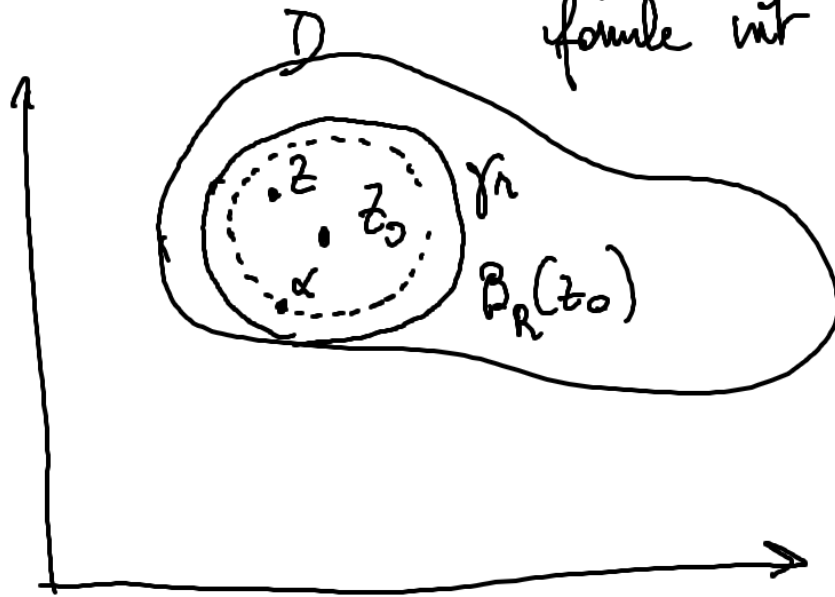


Remarque: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{c_n} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

avec $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$
 formule int de Cauchy



Dem:



Soit γ_r boule centre z_0 rayon r
 r tel que $z \in \text{int} \gamma_r$. D'après la
 formule intégrale de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha$$

avec $|z-z_0| < |\alpha-z_0| = r$ donc $\frac{|z-z_0|}{|\alpha-z_0|} < 1$

$$\alpha - z = \alpha - z_0 + z_0 - z = (\alpha - z_0) \left(1 + \frac{z_0 - z}{\alpha - z_0} \right) = (\alpha - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \right)$$

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{(\alpha - z_0) \left(1 - \underbrace{\frac{z - z_0}{\alpha - z_0}}_q \right)}$$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad |q| < 1$$

$$= \frac{1}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \right)^n$$

$$\text{Thus: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \right)^n d\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z - z_0)^n$$