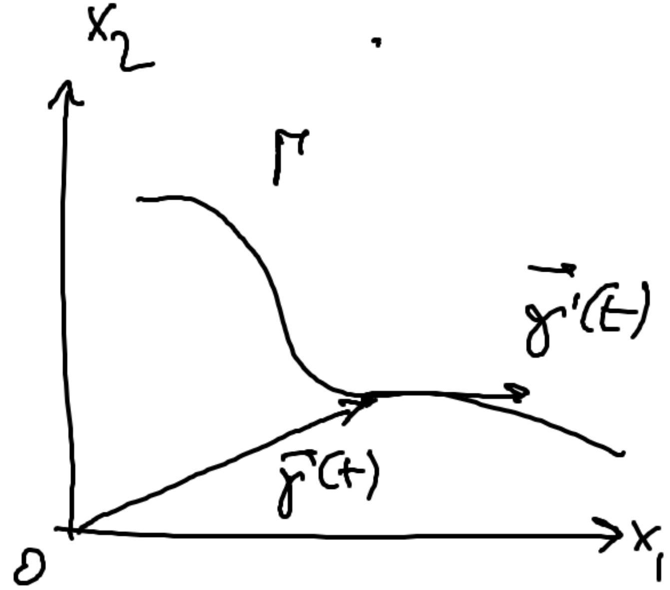
Chap 9 : $O \subset \mathbb{C}$ $\quad f : O \to \mathbb{C}$

$$z \to f(z)$$
$$x+iy \to u(x,y)+iv(x,y)$$

f holomorphe $\iff$ u, v $\mathcal{C}^1(O)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$



Chap 10 : Intégration complexe – Thm de Cauchy

Rappel A3 vectorielle $\quad \vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \to \vec{F}(x_1, x_2) = \left(F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)\right)$$

Γ courbe régulière param $\vec{\gamma} : [a,b] \to \Gamma$

$$t \to \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

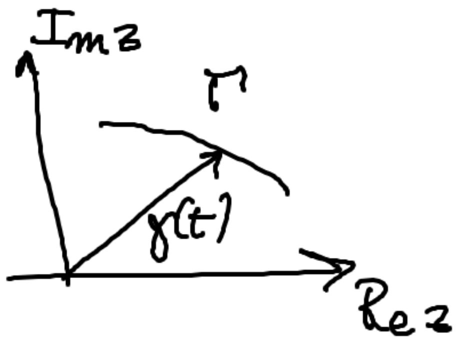
$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b \left(F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)\right) dt$$

Thm Green 4.2 $\quad \displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{\text{int}\,\Gamma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, d_2$

Γ fermée

Def 10.1 Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ courbe régulière de param. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

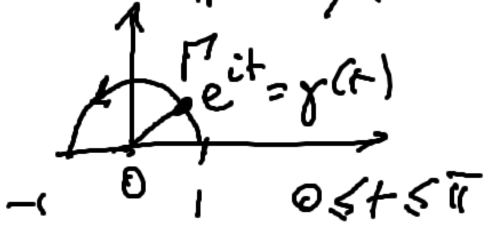
Soit $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ on note



$$\underbrace{\int_\Gamma f(z)\,dz}_{\text{gamma maj}} \underset{\text{abus de notation}}{=} \underbrace{\int_\gamma f(z)\,dz}_{\text{gamma minuscule}} \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}_{\text{produit de deux nombres complexes}}\,dt$$

si $f = u + iv$ et $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ $\quad \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b \Big(u(\alpha(t),\beta(t)) + i v(\alpha(t),\beta(t))\Big)\big(\alpha'(t) + i\beta'(t)\big)\,dt$

Exemple 1 : $f(z) = z^2$ $\quad \Gamma$: demi-cercle sup de centre 0 et rayon 1



$$\int_\Gamma z^2\,dz = \int_0^\pi (e^{it})^2\, i e^{it}\,dt = i\int_0^\pi e^{i3t}\,dt = \frac{i}{3i}\Big[e^{i3t}\Big]_{t=0}^{t=\pi}$$

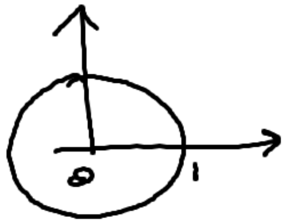
$$= \frac{1}{3}(-1-1) = -2/3$$

Exemple 2

Si Γ cercle centre 0 rayon 1, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ $\quad \int_\Gamma z^2\,dz = 0$ (conséq. thm 10.2 de Cauchy)

Exemple 3 : $f(z) = \frac{1}{z}$ Γ cercle centre 0 rayon 1

$\gamma(t) = e^{it}$



$$\int_\Gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\, dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} i\, dt = i\, 2\pi = 2\pi i$$

Remarque : courbe régulière par morceaux

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k \qquad \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

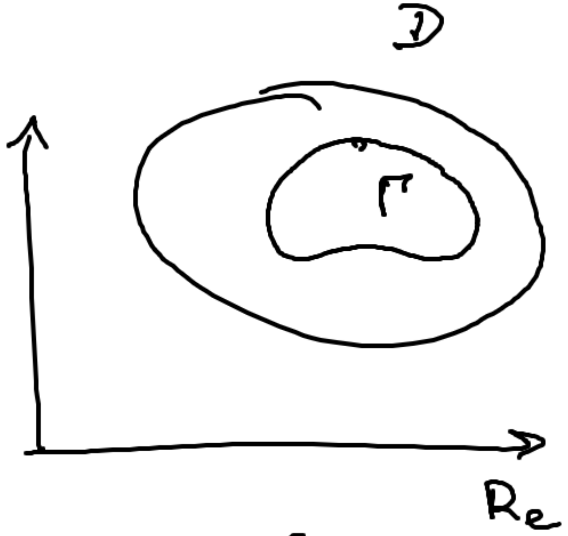
Thm 10.2 (théorème de Cauchy)

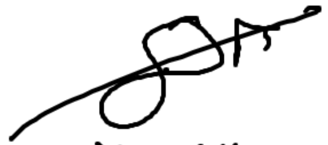
Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\Gamma \subset D$ courbe fermée simple régulière (par morceaux)

On a alors $\int_\Gamma f(z) dz = 0$

(pourrait ressembler $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = 0$)

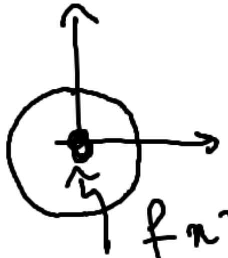




Exemple 2 : $f(z) = z^2$ Γ cercle centre 0 rayon 1

$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ le thm s'applique

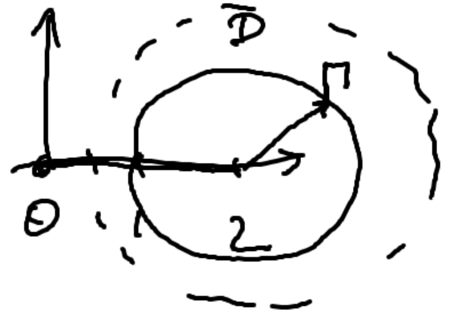
Exemple 3 : $f(z) = \frac{1}{z}$



le thm ne s'applique pas
d'ailleurs on a trouvé $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i$

f n'est pas holomorphe

Par contre si Γ cercle est le cercle de centre 2 et rayon 1

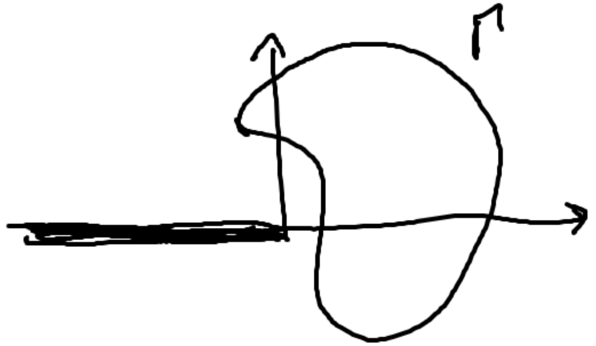


$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe et donc $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

Calcul explicite non trivial : $\gamma(t) = 2 + e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{2+e^{it}}\,dt = \underbrace{\int \left(\log(2+e^{it})\right)' dt = \left[\log(2+e^{it})\right]_{t=0}^{t=2\pi}}_{\text{pas le droit}} = 0$$

? réponse exercice 10.10



$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$

Exemple 4 : $f(z) = \frac{1}{z^2}$ Γ cercle centre 0 et rayon 1 $\int_\Gamma f(z)\,dz$

on ne peut pas appliquer ~~th~~ le thm 10.2.

$\gamma(t) = e^{it}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{i2t}}\,dt = \int_0^{2\pi} ie^{-it}\,dt = \frac{i}{-i}\left[e^{-it}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$

<u>Dem</u> : $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe D simplement connexe Γ courbe fermée simple régulière (par ~~morceaux~~)

$\gamma : [a,b] \to \Gamma \subset \mathbb{C}$

$t \to \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$

$z = x+iy$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \xrightarrow{CR} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b \Big(u(\alpha(t),\beta(t)) + iv(\alpha(t),\beta(t))\Big)\big(\alpha'(t) + i\beta'(t)\big)dt = \int_a^b \Big(u(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) - v(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\Big)dt$$

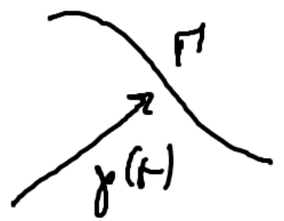
$$+ i\int_a^b \Big(v(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + u(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\Big)dt$$

$$= \int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dl} + i\int_\Gamma \vec{G}\cdot\vec{dl}$$

où $F(x,y) = \big(u(x,y), -v(x,y)\big)$ et $G(x,y) = \big(v(x,y), u(x,y)\big)$

$$\overset{\text{thm 4.2}}{=} \iint_{\text{int}\,\Gamma} \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{0} dx\,dy + i\iint_{\text{int}\,\Gamma} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} dx\,dy = 0.$$

Exercice 10.10 : $\int_\Gamma z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right] = \left[\frac{(\gamma(t))^3}{3}\right]_{t=a}^{t=b}$



Oui : $\int_\Gamma f(z) dz = \int_\Gamma F'(z) dz = \left[F(\gamma(t))\right]_{t=a}^{t=b}$?

et $f = F'$ réponse : oui si $f : D \to \mathbb{C}$ $F : D \to \mathbb{C}$ D simpl connexe

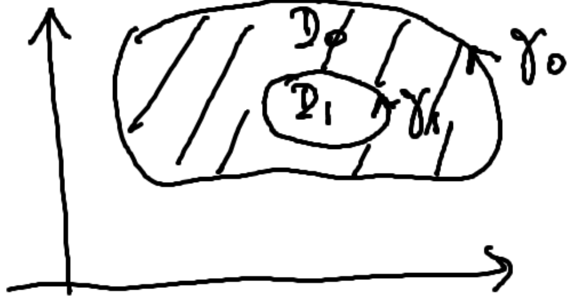
et F holomorphe

Oui : $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz = \left[\log z(\gamma(t))\right]_{t=a}^{t=b}$ si

→ en particulier si Γ est fermée $\gamma(b) = \gamma(a)$ et donc $\int_\Gamma f(z) dz = 0$

correspond à (A3) $\int_\Gamma \vec{\text{grad}} f . d\vec{l} = \left[f(\vec{\gamma}(t))\right]_{t=a}^{t=b}$ si Γ est fermée alors $\int_\Gamma \vec{\text{grad}} f . d\vec{l} = 0$

Corollaire du théorème de Cauchy (pas dans le livre)



D_0 simplement connexe

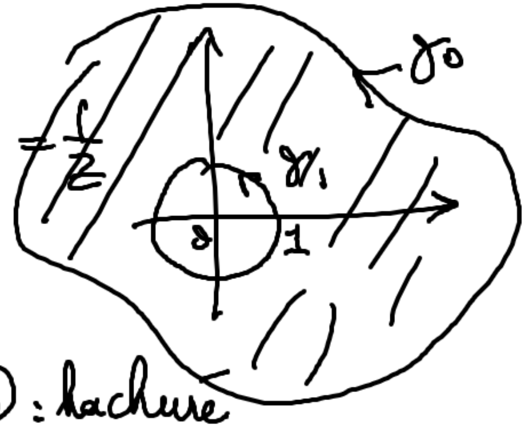
γ_0 γ_1 orientés dans le même sens, courbes fermées

On suppose f est holomorphe dans $D = D_0 \setminus D_1$ (hachurée).

Alors on a : $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$

Ex : γ_1 : cercle centre 0 rayon 1 γ_0 courbe fermée qui contient γ_1 $f(z) = \frac{1}{z}$

~~on a~~ $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe
$z \mapsto \frac{1}{z}$

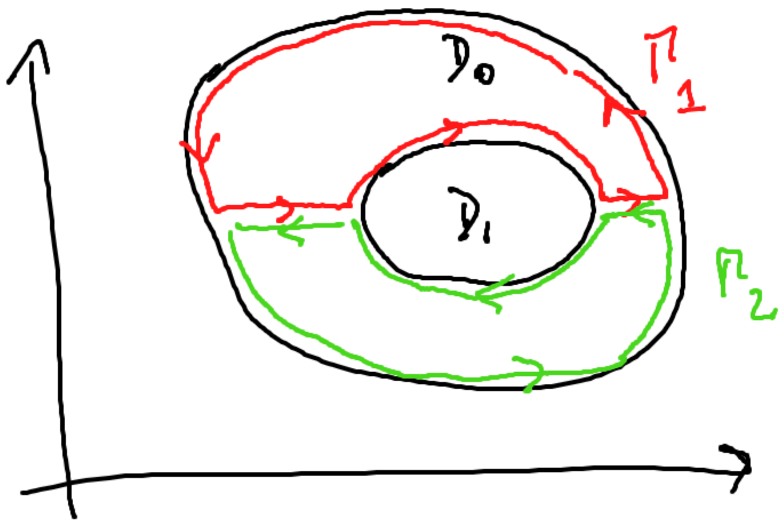


$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

D : hachuré

Raisonnement à la base de la formule intégrale de Cauchy

Dem :



Thm de Cauchy

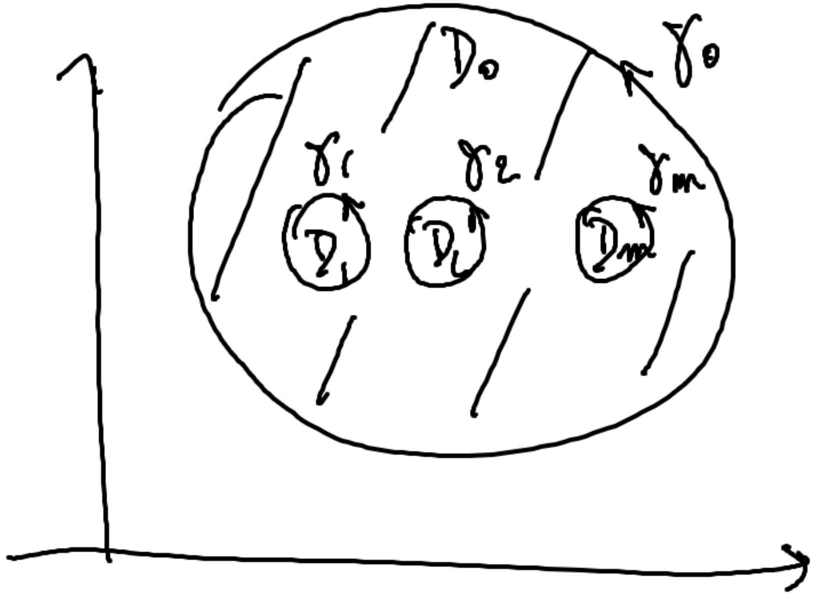
$f : \text{int}\,\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = 0$

$f : \text{int}\,\Gamma_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ —— $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$

on somme

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

Idem avec m trous



$D : D_0 \setminus \{D_1 \cup D_2 \cup \dots D_m\}$

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_m} f(z)\,dz$$