Série d'exercices 9

Disclaimer: the exercises are arranged by theme, not by order of difficulty.

Mesurabilité

Exercise 1 *Rappelez-vous qu'une fonction simple finie est une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *qui peut s'écrire*

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

où $n \geq 1$, $(c_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ *et* $(E_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ *sont des ensembles boréliens disjoints.*

Montrez que pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, il existe une suite de fonctions simples finies qui converge simplement vers* g*.*

Intégrale de Lebesgue

Exercise 2 *Montrez que* $x \mapsto \exp(-|x|)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$*, mais que la fonction constante c ne l'est pas si* $c \neq 0$*. La fonction* $f : x \mapsto x$ *est-elle intégrable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercise 3 *Soient* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables et intégrables. Le produit* fg *est-il nécessairement intégrable ? Et si* $|g(x)| \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *?*

Exercise 4 *En probabilité/statistiques, vous avez vu la notion de variable aléatoire* X*. Supposons que* X *prend ses valeurs dans l'ensemble* $C = \{c_1, c_2, \dots\}$*, chacune avec une probabilité* $\mathbb{P}(c_i)$*. Quelle est l'espérance de cette variable aléatoire ? Comparez cela à l'intégrale de Lebesgue d'une fonction simple prenant ses valeurs dans l'ensemble* C*.*

Exercise 5 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $a \in \mathbb{R}$*. Vérifiez que* af *est intégrable et montrez que* $\int af d\lambda = a \int f d\lambda$*.*

Indice : Vous pouvez procéder directement à partir de la définition, ou utiliser une stratégie similaire à celle de la linéarité : montrez d'abord le résultat pour des fonctions simples, puis utilisez les théorèmes de convergence.

Théorèmes de convergence

Exercise 6 *Soit* $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ *une suite décroissante de fonctions intégrables, convergeant ponctuellement vers une fonction intégrable* f*. Montrez que* $\int f_n \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \mathrm{d}\lambda$*.*