Série d'exercices 8

Avertissement : les exercices sont classés par thème, <u>pas</u> par ordre de difficulté.

Mesurabilité

Exercice 1 *Prouvez que si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont Borel-mesurables alors $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ sont boréliens.*

Exercice 2 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$. Prouvez que $\sup_n f_n(x)$ et $\inf_n f_n(x)$ sont également mesurables.*

Intégrale de Lebesgue

Exercice 3 *Prouvez que la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor est nulle.*

Exercice 4 (Exemples) *Trouvez une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non bornée, mais quand même intégrable. Trouvez également une fonction mesurable f non nulle uniquement sur $[0, 1]$ mais pas intégrable.*

<u>Indice :</u> dans les deux cas, il peut être plus facile de travailler avec des fonctions simples pour lesquelles l'intégrale se calcule facilement.

Exercice 5 (Propriétés de base de l'intégrale de Lebesgue) *Montrez le Lemme 2.26 du cours, c'est-à-dire que pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable :*

2. *si $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors elle est intégrable sur toute boîte finie $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$*
3. *si $\lambda(f \neq 0) := \lambda(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$, alors f est intégrable et $\int f d\lambda = 0$*
4. *si $f \geq 0$ et $\int f d\lambda = 0$, alors $\lambda(f \neq 0) = 0$.*

Exercice 6 (Linéarité de l'intégrale pour fonctions simples) *Prouvez que pour $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions simples finies[1] et $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ est intégrable et*

$$\int (af + bg)\mathrm{d}\lambda = a \int f \ \mathrm{d}\lambda + b \int g \ \mathrm{d}\lambda.$$

1. On entend par cela qu'elles admettent une écriture $f = \sum_{i=1}^{n_f} \alpha_i \mathbf{1}_{F_i}$, $g = \sum_{j=1}^{n_g} \beta_j \mathbf{1}_{G_j}$ où $(\alpha_i)_{i=1}^{n_f}, (\beta_j)_{j=1}^{n_g} \subset \mathbb{R}$ et $(F_i)_{i=1}^{n_f}$ (resp. $(G_j)_{j=1}^{n_g}$) forment une partition (disjointe) de $\mathbb{R}^n$ par des boréliens avec $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ and $F_0^c = \bigcup_{i=1}^{n_f} F_i$ (resp. $G_0^c = \bigcup_{j=1}^{n_g} F_j$) ayant mesure finie.