Série d'exercices 7

Avertissement : les exercices sont classés par thème, et non par ordre de difficulté. Vous pouvez utiliser le résultat de l'Exercice 2 pour les autres exercices.

Rappels

Exercise 1 (Bons comportements de f^{-1}) *Soit $f : A \to B$, I_A, I_B des ensembles d'indices, et $(B_i)_{i \in I_B}$ une collection quelconque de sous-ensembles de B. Rappelons que l'image réciproque $f^{-1}(B_i)$ est définie par*

$$f^{-1}(B_i) = \{x \in A : f(x) \in B_i\} .$$

Vérifiez que lorsque f est bijective, f^{-1} est bien une fonction. Que se passe-t-il si f n'est pas injective ou pas surjective ?

Puis démontrez les identités suivantes :

— $f^{-1}(\cup_{i \in I_B} B_i) = \cup_{i \in I_B} f^{-1}(B_i)$;

— $f^{-1}(\cap_{i \in I_B} B_i) = \cap_{i \in I_B} f^{-1}(B_i)$.

Fonctions mesurables

Exercise 2 (Autres définitions de la mesurabilité) *Montrez qu'une fonction f est mesurable si et seulement si, pour tous $a < b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}((a, b))$ est Borélien. Montrez aussi que cette propriété reste vraie si l'on remplace (a, b) par $[a, b]$.* [1]

Exercise 3 *Montrez que si f et g sont mesurables, alors $f + g$ et fg le sont aussi.*

Exercise 4 *Montrez que les fonctions continues sont mesurables.*

Exercise 5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ses approximations dyadiques définies par $f_n(x) = 2^{-n} \lfloor 2^n f(x) \rfloor$. Pour $m \geq n \geq 1$, montrez la borne*

$$f(x) - 2^{-n} < f_n(x) \leq f_m(x) \leq f(x).$$

Exercise 6 *Démontrez le Lemme 2.14 du cours, en montrant d'abord que*

$$f^{-1}([a, b)) = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} f_m^{-1}([a - 1/j, b - 1/k))$$

1. En fait, remplacer $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$ par $(-\infty, b), b \in \mathbb{R}$, ou $(a, +\infty), a \in \mathbb{R}$, ou $(a, b], a < b \in \mathbb{R}$, etc., conduit à des définitions toutes équivalentes.

Pour le plaisir (non examinable)

Exercise 7 *Montrez qu'il n'existe pas de collection d'intervalles* $([a_i, b_i])i = 1^n$ *recouvrant* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$*, c'est-à-dire telle que* $\bigcup i = 1^n [a_i, b_i] \supseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$*, tout en ayant une longueur totale* $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < 1$*. En revanche, montrez que c'est possible avec une infinité dénombrable d'intervalles, c'est-à-dire trouvez une suite d'intervalles* $([a_i, b_i])_{i=1}^{+\infty}$ *recouvrant* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *avec une longueur totale arbitrairement petite.*

Exercise 8 *Une définition générale d'une fonction mesurable est la suivante : pour* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesuré, on a* $f^{-1}([a,b)) \in \mathcal{F}$ *pour tout* $a < b \in \mathbb{R}$*.* [2]

— *Quelles sont les fonctions mesurables relatives à l'espace mesuré* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$ *?*

— *Montrez que*

$$\mathcal{G} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ est dénombrable } E^c \text{ est dénombrable}\}$$

est une σ*-algèbre. Est-elle plus grande ou plus petite que la* σ*-algèbre de Borel* $\mathcal{F}_B$ *?*

— *Intuitivement, devrait-il y avoir plus ou moins de fonctions mesurables de* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G})$ *que de* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_B)$ *? Ensuite, déterminez exactement quelles sont les fonctions mesurables de* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G})$ *pour confirmer votre intuition.*

— *Montrez que* $\mathcal{G}$ *est engendrée par les singletons de* $\mathbb{R}^n$*, c'est-à-dire que c'est la plus petite* σ*-algèbre contenant tous les ensembles* $\{x\}, x \in \mathbb{R}^n$*.*

2. Cette définition est naturelle car elle implique que les préimages des ensembles de Borel de $\mathbb{R}$ appartiennent à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que les préimages d'ensembles mesurables sont mesurables.