Exercise sheet 6

Avertissement : les exercices sont classés par thème, non par ordre de difficulté.

Ensembles mesurables et espaces mesurés

Exercise 1 *Définissez un espace mesuré / espace probabilisé pour décrire deux lancers de pièces équitables non liés. Quelles hypothèses faites-vous en donnant cette description ? Définissez une tribu / σ-algèbre adaptée à l'étude de la situation où l'on peut seulement demander si les deux pièces montrent le même côté ou des côtés différents.*

Exercise 2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Prouvez que si A, B sont des ensembles mesurables, alors $A \setminus B := \{a \in A, a \notin B\}$ est aussi mesurable.*

Exercise 3 *Montrez que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ contient aussi tous les produits de demi-droites $\Pi_{i=1}^n(-\infty, a_i]$, toutes les boules ouvertes $B(x,r)$ et en fait tous les ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.*

Mesures

Exercise 4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Prouvez que si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ est une suite croissante d'ensembles mesurables, alors $\mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.*

Prouvez aussi que si $A_1, A_2, \dots$ sont des ensembles mesurables quelconques, alors la majoration par l'union $\mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$ est vérifiée. Interprétez cela dans un contexte probabiliste.

Exercise 5 *Montrez que la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ est infinie et que la mesure de Lebesgue d'un segment $[0,1] \subseteq \mathbb{R}^n$ est nulle.*

Considérons maintenant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Prouvez que la mesure des nombres irrationnels contenus dans $[0, R]$ est égale à R ; prouvez aussi que la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor est nulle.

Exercise 6 *Montrez qu'il n'existe pas de mesure finie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ qui soit invariante par translation, c'est-à-dire telle que $\mu(A+n) = \mu(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Pour le plaisir (non examinable)

Exercise 7 (Tribu de Borel) *Soient Ω et I deux ensembles non vides. Supposons que pour chaque $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ soit une $\sigma-$algèbre sur Ω.*

- *Prouvez que $\mathcal{F} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est aussi une $\sigma-$algèbre sur Ω.*
- *Maintenant, soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrez qu'il existe une $\sigma-$algèbre qui contient $\mathcal{G}$ et qui est contenue dans toute autre σ-algèbre contenant $\mathcal{G}$. C'est ce qu'on appelle la $\sigma-$algèbre engendrée par $\mathcal{G}$.*
- *Concluez que la $\sigma-$algèbre de Borel est bien définie.*

Exercise 8 (Non-existence de mesures de probabilité sur l'ensemble des parties) *Il n'existe pas de mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ qui soit invariante par translation, c'est-à-dire telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu(A+\alpha) = \mu(A)$, et localement finie, c'est-à-dire telle que $\mu([0,1]) < +\infty$.*

Indice : Considérez la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$. Utilisez l'axiome du choix pour construire un ensemble de représentants des classes d'équivalence et prouvez par contradiction que cet ensemble ne peut pas être mesurable.

Remark 1 *Sans l'axiome du choix*[1], *on ne peut en fait ni prouver ni réfuter l'existence d'un ensemble non mesurable. Mais sans l'axiome du choix, on ne peut pas non plus réfuter que* $\mathbb{R}$ *n'est pas une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables...*

[1] Rappelons que l'Axiome du choix affirme ce qui suit : si l'on dispose d'une collection quelconque d'ensembles non vides $(X_i)_{i\in I}$, alors leur produit est non vide. En d'autres termes, on peut définir une fonction $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ telle que pour tout $i \in I$, $f(i) \in X_i$.