Série 5

Avertissement : les exercices sont classés par thème, et non par ordre de difficulté.

Fonctions continues

Exercice 1 *Trouvez une suite* $(f_n)_{n\geq 1} \subset C^1([0,1],\mathbb{R})$ *qui converge vers une fonction* $f \in C(D,\mathbb{R})$ *pour la norme uniforme* $\|\cdot\|_\infty$*, mais où* f *n'est pas dérivable. Montrez ensuite que si la convergence a lieu pour la norme* $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$*, alors la limite est aussi continûment dérivable.*

Intégrale de Riemann

Exercice 2 *Montrez que l'intégrale de Riemann vérifie certaines propriétés intéressantes :*

- *Toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est intégrable au sens de Riemann.*
- *Toute fonction constante par morceaux est intégrable au sens de Riemann.*
- *Linéarité : si* f, g *sont intégrables au sens de Riemann sur* $[0,1]$*, alors leur somme l'est aussi, et l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales.*

Fourier

Exercice 3 *Nous cherchons à conclure la démonstration de la Proposition 1.9 des notes de cours. Rappelons que nous considérons une fonction* $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ *deux fois continûment dérivable et vérifiant* $f(0) = f(1)$ *ainsi que* $f'(0) = f'(1)$*. Nous avons montré dans la première partie de la preuve que*

$$f_N := \sum_{n=1}^{N} (s_n \sin(2\pi nx) + c_n \cos(2\pi nx))$$

converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ *vers une fonction* $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ *lorsque* $N \to \infty$*, où* $(s_n)_{n\geq 1}$ *et* $(c_n)_{n\geq 1}$ *sont les coefficients de Fourier de* f*.*

En utilisant la définition de f_N *et* g*, montrez que pour tout* $n \geq 0$*,*

$$\int_0^1 (f-g)\cos(2\pi nx)\mathrm{d}x = \int_0^1 (f-g)\sin(2\pi nx)\mathrm{d}x = 0,$$

et concluez la preuve à l'aide de la Proposition 1.12.

Exercice 4 (Noyau de Fejér, I) *Un choix possible pour la fonction* T_{n,x_0} *dans les notes est le noyau de Fejér, noté* $F_n^{x_0}$*. Le noyau de Fejér pour* $x_0 = 0$ *est donné par*

$$F_n^0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos(2\pi kx).$$

Déduisez l'expression de $F_n^{x_0}$ *pour* $x_0 \in (0,1)$*.*

Ensuite, démontrez rigoureusement les propriétés suivantes, et ainsi le Lemme 1.13 :

1. $\forall n \geq 1,\ F_n^{x_0}(x) \geq 0$,
2. $\forall n \geq 1,\ \int_0^1 F_n^{x_0}(x)\mathrm{d}x = 1$,

3. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_{|x-x_0|>\varepsilon} F_n^{x_0}(x)\mathrm{d}x = 0.$

Indice: Pour 1., réexprimez le cosinus dans l'expression de F_n^0 avec des exponentielles complexes et prouvez l'identité

$$\sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)e^{2\pi i k x} = (e^{2\pi i x\frac{n-1}{2}} + e^{2\pi i x\frac{n-3}{2}} + \cdots + e^{-2\pi i x\frac{n-1}{2}})^2$$

Exercice 5 (Noyau de Fejér, II)

1. *Pour toute fonction $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1)$, montrez que*

$$\int_0^1 f(x)F_n^{x_0}(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0).$$

   Ainsi, le noyau de Fejér est en un certain sens une 'approximation de la fonction delta de Dirac'.

2. *Calculez formellement les coefficients de Fourier de la fonction delta de Dirac, c'est-à-dire d'une « fonction »*[1] *$\delta_{x_0} : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ pour un $x_0 \in [0,1]$ fixé, telle que pour toute fonction $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = f(1)$,*

$$\int_0^1 f(x)\delta_{x_0}(x)\mathrm{d}x = f(x_0),$$

   et écrivez formellement sa série de Fourier.

3. *Montrez que les coefficients de Fourier de $F_n^{x_0}$ convergent vers l'expression formelle que vous avez trouvée en 2.*

Ensemble de Cantor

Exercice 6 (L'ensemble de Cantor) *Considérons la construction itérative suivante : on pose $C_0 = [0,1]$ et on définit C_1 en retirant le tiers central, c'est-à-dire $C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3)$. Pour obtenir C_2, on enlève ensuite le tiers central des deux intervalles restants. On poursuit ce procédé par récurrence et on définit $C = \cap_{i\geq 1} C_i$. Montrez que C est un ensemble fermé (c'est-à-dire que $[0,1]\setminus C$ est ouvert) avec un intérieur vide (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'intervalle ouvert contenu dans C).*

Il contient aussi une infinité non dénombrable d'éléments et est un ensemble parfait - ces deux faits sont à démontrer dans la section bonus. On peut également le décrire comme l'ensemble des nombres de $[0,1]$ dont le développement en base 3 ne contient aucun chiffre 1.

Pour le plaisir (non examinable)

Exercice 7 (L'ensemble de Cantor est parfait) *Montrez que l'ensemble de Cantor C contient une infinité non dénombrable d'éléments et est un ensemble parfait, c'est-à-dire qu'il n'a aucun point isolé : pour tout $x \in C$, il existe une suite d'éléments $x_n \in C$ avec $x_n \neq x$ qui converge vers x.*

[1] Une telle fonction n'existe pas au sens classique du terme !