Série d'exercices 12

Avertissement : les exercices sont classés par thème, pas par ordre de difficulté.

Exercice 1 (Inégalité de Markov)**.** *Soit f est intégrable et positive et $\beta > 0$. Prouvez que $\lambda(\{x : f(x) > \beta\}) \leq (\int f\, d\lambda)/\beta$.*

Concluez que si $f, g \in L^1(E)$ vérifient $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$, alors $\lambda(\{x : |f(x) - g(x)| > \lambda\}) \leq \varepsilon/\lambda$.

Exercice 2. *Considérons la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $L^2([0,1], \mathbb{C})$ définie pour $f, g \in L^2([0,1], \mathbb{C})$ par*

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f\, \overline{g}\, d\lambda,$$

qui est un produit scalaire (hermitien / complexe)[1], faisant de $L^2([0,1], \mathbb{C})$ un espace vectoriel complexe. Ensuite, de façon analogue à l'Exercice 3, série 3, montrez que les fonctions $(\exp(2\pi i n \cdot))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont orthonormées dans $L^2([0,1])$.

Exercice 3. *Montrez que, sur un espace préhilbertien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, l'application $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ définit toujours une norme.*

Exercice 4. *Soient $v_1, v_2, \ldots$ des vecteurs orthonormaux dans un espace préhilbertien complet V. Montrez que pour tout $w \in V$, la somme $\widehat{w} := \sum_{i \geq 1} \langle v_i, w \rangle v_i$ est bien définie et satisfait : 1) $\|\widehat{w}\| \leq \|w\|$; 2) $\langle w - \widehat{w}, v_i \rangle = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

Exercice 5.

1. *Montrez que dans tout espace préhilbertien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ayant une base orthonormale $(v_i)_{i \geq 1}$, la norme*
$$\|w - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i\|$$
est (strictement) minimisée pour $c_i = \langle v_i, w \rangle$.

2. *En utilisant cela, montrez le second point du Lemme 3.16, à savoir que dans un espace préhilbertien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admettant une base orthonormale $(v_i)_{i \geq 1}$, l'écriture $w = \sum_{i \geq 1} a_i v_i$ de tout $w \in V$ est telle que chaque a_i est uniquement déterminé, et en fait égal à $\langle v, v_i \rangle$.*

Exercice 6. *Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $\bar{c} = (c_i)_{i \geq 1}$ telles que $\sum_{i \geq 1} c_i^2 < \infty$. Montrez qu'en munissant cet ensemble de l'addition (coordonnée par coordonnée) et du produit scalaire $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{i \geq 1} a_i b_i$, on obtient un espace préhilbertien.*

Non-évaluable (bonus)

Exercice 7. *Complétez la preuve que L^1 est complet.*

[1] Pour que le produit scalaire soit définie positive, il faut identifier les fonctions de $L^2([0,1], \mathbb{C})$ égales presque partout, comme dans le cas réel.