Série d'exercices 11

Avertissement : les exercices sont classés par thème, pas par ordre de difficulté.

Exercice 1 (Translations et dilatations). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^*$. Prouvez que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-\alpha)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(\mu x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x).$$

Exercice 2. *Le but est de calculer $I = \int_{(0,\infty)} \exp(-x)\frac{\sin^2(x)}{x}\, d\lambda(x)$. Pour cela, on définit $f(x,y) = \exp(-x)\sin(2xy)$ et on utilise Fubini :*

- *Montrer que $f(x,y)$ est intégrable sur $(0,\infty)\times[0,1]$;*
- *Montrer qu'en intégrant d'abord en y sur $[0,1]$, on obtient exactement I ;*
- *D'un autre côté, calculer explicitement l'intégrale en intégrant d'abord par rapport à x. Une intégration par parties peut être utile.*

Exercice 3 (Convolutions, I). *Soit g une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ et considérons le produit de convolution $f \star g$ sur $L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire pour $f \in L^1$), défini par*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, dy.$$

1. *Montrer que $f \star g$ est bien défini sur $L^1(\mathbb{R})$. Est-il aussi bien défini sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$?*
2. *Montrer que le produit de convolution est bilinéaire, et commutatif si f, g sont toutes deux bornées et dans L^1.*

Exercice 4. *Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable mais pas dans L^2. Trouver aussi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est dans L^2 mais pas intégrable.*

Cependant, montrer que si E vérifie $\lambda(E) < \infty$, alors $L^1(E) \supset L^2(E)$.

Exercice 5. *Montrer que pour tout $p \geq 1$, il existe une constante c_p telle que pour tous $f, g \in L^p$,*

$$\int |f+g|^p\, d\lambda \leq c_p\left(\int |f|^p\, d\lambda + \int |g|^p\, d\lambda\right)$$

Indication : *vous pouvez utiliser l'inégalité suivante : pour tout $p \geq 1$, il existe une constante c_p telle que pour tous $a, b > 0$:*

$$(a+b)^p \leq c_p(a^p + b^p).$$

Prouvez cette inégalité par exemple en utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$, ou autrement.

Non-évaluable

Exercice 6 (Inégalité triangulaire). *Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $p \geq 1$, la norme $\|\cdot\|_p$ sur L^p satisfait l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire que pour $f, g \in L^p$,*

$$\left(\int |f+g|^p\, d\lambda\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\, d\lambda\right)^{1/p}.$$

1. *Commencez par démontrer l'inégalité de Hölder : Soit* $1 < p < +\infty$ *et* q *défini par la relation*[1]

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Montrez que pour deux fonctions mesurables f, g, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| \leq \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \right)^{1/q},$$

à condition que les deux termes du produit soient finis.

Indication : *vous pouvez utiliser (ou prouver !) l'inégalité de Young pour* $a, b > 0$ *et* p, q *comme ci-dessus :*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

2. *Déduisez l'inégalité triangulaire de l'inégalité de Hölder.*

[1] On peut vérifier que $q = p/(p-1)$.