Série d'exercices 10

Avertissement : les exercices sont classés par thème, pas par ordre de difficulté.

Exercice 1 (Quelques propriétés, revisitées). *Rappelons qu'une propriété P est dite vérifiée presque partout sur $\mathbb{R}$, ou pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, si l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels P n'est pas vérifiée est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Montrer la forme suivante de la linéarité :*

Théorème. *Soient f, g, h des fonctions mesurables et intégrables, et supposons que $h = f + g$ presque partout. Alors h est intégrable et*

$$\int h \, d\lambda = \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda.$$

Montrer aussi la formulation suivante, plus forte, du théorème de convergence monotone :

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives et intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ et croissante presque partout, c'est-à-dire telle que pour tout $n \geq 1$, on ait presque partout*[1] *$f_n \leq f_{n+1}$. Supposons aussi qu'il existe une fonction mesurable f telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ presque partout. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Exercice 2 (Rappel : permutation de sommes). *Donnez des exemples de suites doubles $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ telles que l'une des limites suivantes converge mais pas les autres, ou que toutes convergent mais vers des limites différentes :*

$$1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{n,m} \right) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_{n,m} \right)$$

$$2) \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,m} \right) := \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{n,m} \right)$$

$$3) \quad \lim_{K\to\infty} \sum_{m=1}^{K} \sum_{n=1}^{K} a_{n,m}$$

Par ailleurs, démontrez que si $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est absolument sommable, c'est-à-dire si l'une des limites ci-dessus existe lorsque l'on remplace $a_{n,m}$ par $|a_{n,m}|$, alors les autres aussi, et tous les résultats sont égaux.

[1]Réfléchissez à l'importance de savoir s'il s'agit de « pour tout $n \geq 1$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ » ou « pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ».

Exercice 3. *Soit* $f(x_1,\ldots,x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction (de Borel-)mesurable. Alors, pour tout* $0 < m < n$ *et tout* $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m$*, la fonction* $f_{x_1,\ldots,x_m} : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$*, définie par* $f_{x_1,\ldots,x_m}(y_1,\ldots,y_{n-m}) := f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{n-m})$ *est également mesurable.*

Exercice 4. *Montrer que* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$*,* $x \mapsto x^\alpha$ *est intégrable si et seulement si* $\alpha > -1$*. Qu'en est-il de* $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$*,* $x \mapsto x^\alpha$ *? Revoir l'Exemple 2.41 dans les notes, qui consiste à trouver une fonction* $f : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}$ *qui est intégrable, mais telle qu'il existe un point* $x \in (-1,1)$ *pour lequel* $f(x,\cdot) : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *n'est pas intégrable.*