ANALYSE IV POUR PHYSICIENS

JUHAN ARU

Section 0

Introduction et motivation

Comme motivation, considérons la description mathématique de la transmission de chaleur sur une tige circulaire homogène : l'équation de la chaleur.

L'équation de la chaleur sur un intervalle $[0, 1)$ (décrivant la tige) est donnée par l'évolution du profil de température

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D\Delta u(t,x)$$

accompagnée d'une condition initiale $u_0(x) = u(0,x)$ et de la condition aux bords $u(t,0) = u(t,1)$ pour tout $t \geq 0$ afin d'exprimer que les extrémités de la tige sont connectées. Rappelons que dans le cas 1D $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et que $D > 0$ est le coefficient de diffusion.

L'idée révolutionnaire de Fourier était la suivante. Il a remarqué empiriquement que le profil de chaleur au fil du temps présente un comportement oscillatoire spatial et, motivé également par la solution de l'équation des ondes à l'aide des ondes, il a proposé d'écrire toute solution en utilisant des fonctions oscillantes spatialement telles que $f_n(x) = \sin(2\pi x)$ et $g_n(x) = \cos(2\pi nx)$. Plus précisément, on pourrait essayer de trouver une solution de la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} s_n(t)\sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n(t)\cos(2\pi nx).$$

Mais remarquons maintenant que $\Delta f_n = -4D\pi^2 n^2 f_n$ et ainsi si nous essayons une solution de la forme $u_n(x,t) = f_n(x)s_n(t)$ avec f_n comme ci-dessus, nous obtenons une équation

$$\frac{\partial s_n(t)}{\partial t} = -4D\pi^2 n^2 s_n(t).$$

Il s'agit d'une EDO bien connue qui se résout facilement : $s_n(t) = \exp(-4D\pi^2 n^2 t)s_n(0)$. De même, pour les termes en cosinus, on obtient $c_n(t) = \exp(-4D\pi^2 n^2 t)c_n(0)$.

Nous concluons qu'il serait logique de proposer une solution de la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} s_n(0)\exp\big(-D4\pi n^2 t\big)\sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n(0)\exp\big(-D4\pi n^2 t\big)\cos(2\pi nx).$$

Remarquez que la condition initiale se traduit alors par la condition :

$$u_0 = \sum_{n\geq 1} s_n(0)\sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n(0)\cos(2\pi nx).$$

Si nous trouvons de tels $(s_n(0), c_n(0))_{n\geq 0}$, alors nous avons peut-être trouvé au moins une solution à l'équation de la chaleur sur la tige circulaire.

Cela peut sembler très convaincant, mais en y regardant de plus près, plusieurs questions se posent ici :

(1) Nous avons des sommes infinies - convergent-elles même ? Quand convergent-elles et en quel sens ?

(2) Pour quelles fonctions u_0 l'expansion donnée ci-dessus est-elle valable ? En d'autres termes, pour quelles conditions initiales peut-on trouver une solution par cette méthode ?

(3) De telles expansions sont-elles uniques ? Les solutions que nous trouvons sont-elles uniques ?

(4) Peut-on approximer des solutions ? Par exemple, cela est pertinent lors de la résolution numérique de l'équation. C'est une question de convergence - et plus loin, comment la notion de convergence se rapporte-t-elle aux coefficients s_n, c_n ?

(5) Plus généralement, comment mesurer la proximité de différentes conditions initiales, de différentes solutions ?

(6) Que se passe-t-il pour des tiges non circulaires, par exemple des tiges avec des extrémités dans des bains thermiques ? Ou en dimensions supérieures ?

(7) Qu'en est-il d'un cas plus non homogène où D n'est plus une constante dans l'espace ? Ou lorsque nous remplaçons Δ par des opérateurs (linéaires) plus généraux, incluant par exemple certaines influences extérieures ?

L'objectif de ce cours est d'étudier le cadre mathématique adéquat pour poser et répondre à ces questions. Cela nous amènera à étudier des espaces de fonctions, l'intégrale de Lebesgue et la théorie spectrale des opérateurs linéaires. Pour comprendre pourquoi certains de ces aspects pourraient intervenir, considérons un modèle simplifié.

0.1 Un modèle discret

Pour comprendre ce que nous pouvons espérer obtenir, considérons le même problème de diffusion de chaleur mais sur un espace discrétisé. Par exemple, nous pensons que la tige est décomposée en n petits récipients pouvant échanger de la chaleur entre leurs voisins.

Le profil de température est maintenant donné par $u(x,t) : \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$, avec la condition de périodicité $u(0,t) = u(n,t)$ pour tout $t \geq 0$.

L'évolution est toujours donnée par

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = K\Delta_d u(t,x)$$

avec une condition initiale $u_0(x) = u(0,x)$, mais au lieu du laplacien réel, nous avons le laplacien discret $\Delta_d f(x) := \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} f(y) - f(x)$, où $y \sim x$ signifie que y, x sont des voisins dans le graphe discret sous-jacent et d_x est le nombre de voisins du sommet x. Dans notre cas concret, nous avons un graphe circulaire avec n sommets et donc $\Delta_d f(x) := \frac{f(y)+f(z)-2f(x)}{2}$, où y, z désignent les sommets voisins.

Remarquez maintenant que le problème est réellement un système de n équations différentielles ordinaires de second degré et que Δ_d est simplement un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Comment le résoudre ?

Utilisons les mêmes étapes que ci-dessus mais voyons qu'elles ont ici un sens très simple et concret :

- Remarquez que chaque u_t peut être vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec des coordonnées et que Δ_d peut être vu comme un opérateur linéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ (vérifiez-le !)
- En tant que tel, Δ_d peut être diagonalisé : il existe une base orthonormale $\phi_1, \dots, \phi_n$ et des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $\Delta_d \phi_i = \lambda_i \phi_i$. En particulier, toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut être écrite de manière unique comme $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i$.

- Mais maintenant, si nous écrivons $u_i(t) := c_i(t)\phi_i$, alors à nouveau chaque $c_i(t)$ satisfait une EDO découplée
$$\frac{\partial c_i(t)}{\partial t} = K\lambda_i s_n(t)$$
et a donc pour solution $c_i(0)\exp(K\lambda_i t)$.
- Nous concluons une solution en trouvant $c_i(0)$ en déterminant l'expansion unique $u_0 := \sum_{i=1}^n c_i(0)\phi_i$.
- Étant donné l'unicité de l'expansion, cette solution est également unique.
- Et enfin, nous pouvons facilement comparer les solutions en utilisant par exemple la norme euclidienne. Par exemple, on conclut que si les conditions initiales sont proches, les solutions le seront aussi pour tout $t > 0$. Nous savons également que cette distance se mesure de manière équivalente en utilisant les distances entre deux ensembles de coefficients $(c_i)_{i=1\ldots n}, (\tilde{c}_i)_{i=1\ldots n}$ - et ici, l'utilisation de la norme euclidienne au lieu d'une autre norme est importante.

Ainsi, dans ce cadre, tout fonctionne très bien et fonctionnerait tout aussi bien tant que nous avons un opérateur linéaire symétrique L à la place de Δ_d.

Que nous avons-nous utilisé ici ?

- Nous avons utilisé le fait que $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et qu'il existe donc des bases qui donnent des développements uniques pour chaque vecteur
- Nous avons utilisé le fait que Δ_d est linéaire et symétrique et que, selon le théorème spectral, il peut être diagonalisé et nous pouvons trouver une base de vecteurs propres
- Nous avons implicitement utilisé la linéarité de l'équation

Aucune de ces affirmations n'est évidente dans notre configuration initiale, car l'espace des fonctions de $[0, 1]$ à $\mathbb{R}$ n'est plus de dimension finie !

Pour y remédier, nous devrons examiner les espaces de fonctions et essayer de voir tout d'abord quels espaces de ce type possèdent une structure agréable. Par exemple, quels espaces de fonctions satisfont la linéarité ? Lesquels permettent de définir une norme et de parler d'orthonormalité ? Pour quels espaces avons-nous des développements orthonormaux ?

La recherche de telles propriétés agréables nous amène par exemple à introduire l'intégrale de Lebesgue pour construire de belles bases de fonctions.

Après cela, après avoir passé un certain temps à comprendre les espaces de fonctions, nous étudierons brièvement les opérateurs linéaires sur de tels espaces et, en particulier, nous trouverons des configurations dans lesquelles il existe des décompositions orthonormales similaires à l'aide de fonctions propres. Nous réunirons ensuite tous ces éléments pour expliquer rigoureusement la résolution de l'équation de la chaleur non homogène et d'autres problèmes similaires.

Mais c'est déjà assez d'introduction, allons-y !

Section 1

L'espace des fonctions continues

Commençons par l'un des espaces de fonctions les plus intuitifs : l'espace des fonctions continues. Ceci constitue en partie un rappel, car vous avez déjà travaillé avec des fonctions continues en Analyse I-III, et nous ne faisons ici que les replacer dans un contexte plus large.

Pour commencer, les fonctions prennent leurs valeurs sur des domaines D rectangulaires i.e. du forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, r_n]$ dans $\mathbb{R}^n$ et prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. À la fin de la section, nous discuterons dans quelle mesure il est possible (et souhaitable) de généraliser ces choix. Vous pouvez sans problème supposer que $D = [0, 1]$, car le choix d'autres domaines fermés et bornés ne présente pas de difficultés supplémentaires.

L'ensemble de toutes les fonctions continues de D vers $\mathbb{R}$ sera noté $C(D, \mathbb{R})$:

$$C(D, \mathbb{R}) := \{f : D \to \mathbb{R}, f \text{ continu}\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons essayer de comprendre la structure de cet espace.

1.1 Structure d'espace vectoriel de $C(D, \mathbb{R})$

La première observation que nous pouvons faire à propos de l'espace $C(D, \mathbb{R})$ est qu'il possède une structure linéaire, comme par exemple l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, +)$: si $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, alors la fonction $h(x) := f(x) + g(x)$ appartient également à $C(D, \mathbb{R})$, tout comme la fonction $\lambda f(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vérifions rapidement cette propriété pour la première affirmation : pour chaque $x \in D$, par continuité de f, g, nous pouvons choisir δ_f, δ_g tels que si $y \in D, \|x - y\| < \delta_f$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et si $y \in D, \|x - y\| < \delta_g$, alors $|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Cela signifie que si $\|x - y\| < \min(\delta_f, \delta_g)$, on a $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ grâce à l'inégalité triangulaire.

Exercise 1.1. *Montrez que $C(D, \mathbb{R})$ possède également une structure multiplicative : c'est-à-dire que si $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, alors le produit $h(x) := f(x)g(x)$ appartient également à $C(D, \mathbb{R})$. Qu'en est-il de la fonction $\max(f, g)$?*

En fait, l'espace $C(D, \mathbb{R})$ avec l'addition satisfait tous les axiomes d'un espace vectoriel ! L'élément neutre est simplement la fonction nulle constante, et l'élément inverse de f est la fonction $-f$. Toutes les conditions sont respectées, comme vous pouvez facilement le vérifier.

Exercise 1.2. *Rappelez-vous des axiomes d'un espace vectoriel et vérifiez-les dans le cas de $(C(D, \mathbb{R}), +)$.*

Dans la suite, nous appellerons souvent l'espace vectoriel simplement $C(D, \mathbb{R})$.

Nous pourrions également nous intéresser à la somme d'un nombre infini de fonctions, c'est-à-dire à des sommes du type $\sum_{n\geq1} f_n$. Mais dans quel sens pouvons-nous en parler ? Plus généralement, étant donné une suite $(g_n)_{n\geq1}$, dans quel sens pouvons-nous parler de sa convergence et de sa limite ?

La première idée pourrait être de définir des limites point par point : pour chaque $x \in D$, la suite $(g_n(x))_{n\geq1}$ est simplement une suite de nombres réels, et nous savons ce que signifie sa convergence. Nous pourrions donc définir la convergence de $(g_n)_{n\geq1}$ en tant que fonctions comme la convergence de $(g_n(x))_{n\geq1}$ pour tout $x \in D$. C'est ce qu'on appelle la convergence ponctuelle, mais elle présente un inconvénient bien connu :

Exercise 1.3. *Trouvez une suite de fonctions de $C(D, \mathbb{R})$ qui converge ponctuellement vers une fonction qui n'est pas continue.*

Il est conseillé de commencer par le cas $D = [0, 1]$ (discuté en cours), puis de réfléchir à la manière de procéder dans le cas général.

1.2 La norme uniforme sur $C(D, \mathbb{R})$

Rappelons que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de plusieurs normes canoniques qui permettent de définir une notion de longueur d'un vecteur et de mesurer les distances entre vecteurs. Il se trouve que l'on peut également munir $C(D, \mathbb{R})$ d'une norme canonique.

Definition 1.1 (La norme du supremum (ou norme uniforme))**.** *Pour $f \in C(D, \mathbb{R})$, nous définissons sa norme du supremum (ou norme uniforme) par :*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Dans cette définition, nous utilisons le fait que D est fermé et borné, sinon le supremum pourrait ne pas être fini.

Exercise 1.4. *Trouver un exemple d'ensemble D qui n'est pas fermé ou pas borné, et une fonction $f \in C(D, \mathbb{R})$ telle que $\|f\|_\infty$, défini ci-dessus, soit infini.*

Nous avons appelé l'expression ci-dessus une norme, mais rappelons qu'une norme sur un espace vectoriel a une définition mathématique précise, et que ses propriétés doivent être vérifiées :

Proposition 1.2. *$\|f\|_\infty$ définit bien une norme sur l'espace vectoriel $C(D, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Nous devons vérifier les conditions d'une norme.

(1) $\|f\|_\infty \geq 0$, avec égalité si et seulement si f est la fonction identiquement nulle. Cela est évident.

(2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$, ce qui est également clair.

(3) Enfin, nous devons vérifier l'inégalité triangulaire : $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Nous avons :

$$\sup_{x \in D}(|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \in D} |g(x)|$$

par l'inégalité triangulaire. On en déduit le résultat :

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in D}(|f(x)| + |g(x)|) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

Ainsi, $(C(D, \mathbb{R}), +, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, à l'instar de $\mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle de ces normes. Cela nous permet d'introduire une notion de convergence qui est bien plus naturelle :

Proposition 1.3. *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions dans $C(D, \mathbb{R})$ qui converge vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ pour la norme uniforme. Alors, f est nécessairement continue.*

Ceci reformule un résultat du cours d'Analyse I selon lequel la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

La technique de preuve utilisée est appelée l'argument des 3ϵ ou $\epsilon/3$, et vous l'avez déjà rencontrée en Analyse I. Donnons la preuve afin de bien comprendre ce qui est différent par rapport à la situation précédente.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $x \in D$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)-f(y)| < 3\epsilon$ dès que $|x-y| < \delta$.

Tout d'abord, choisissons un entier $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$, et en particulier $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in D$ d'après la définition (ce sont les deux premiers ϵ).

Ensuite, par continuité de f_n, on peut choisir $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in D$ vérifiant $|x-y| < \delta$, on ait $|f_n(x)-f_n(y)| < \epsilon$ (c'est le troisième ϵ). En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\epsilon. \end{aligned}$$

□

Remarquons que, dans le cas de la convergence simple, la première étape échoue : on ne peut pas nécessairement choisir un n tel que $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < 3\epsilon$.

Ainsi, muni de cette norme, l'ensemble $C(D, \mathbb{R})$ est stable par passage à la limite pour les suites convergentes. En fait, il est encore mieux structuré : il est complet, une notion que vous avez rencontrée pour $\mathbb{R}^n$ et que nous rappelons ici.

Definition 1.4 (Complétude d'un espace normé)**.** *Un espace normé $(X, |\cdot|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ (c'est-à-dire toute suite telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier nϵ vérifiant $|x_n - x_m| \leq \epsilon$ pour tous $n, m \geq n_\epsilon$) converge vers un élément $x \in X$.*

Theorem 1.5. *L'espace $(C(D, \mathbb{R}), +, |\cdot|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.*

L'idée est d'utiliser la complétude de $\mathbb{R}$ pour définir une fonction limite potentielle, puis de vérifier qu'il s'agit bien de cette fonction.

Démonstration. Il ne reste plus qu'à vérifier la complétude. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $C(D, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est de Cauchy et comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge vers une limite que l'on note $f(x)$. Il reste à prouver que $f_n \to f$ pour la norme uniforme et que f est continue. Ce dernier point découle directement de la proposition précédente, il ne reste donc qu'à démontrer la convergence dans la norme uniforme, ce qui est laissé en exercice. □

Remark 1.6. *Tout espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach. Ces espaces jouent un rôle important notamment en théorie quantique des champs.*

La complétude de l'espace a une application importante, dont l'une est la recherche de solutions aux EDO par approximation. L'outil utilisé ici est le théorème du point fixe de Banach, que vous avez déjà rencontré en Analyse II selon les feuilles de cours et qui est simplement rappelé ici :

Theorem 1.7 (Théorème du point fixe de Banach)**.** *Soit $F : C(D,\mathbb{R}) \to C(D,\mathbb{R})$ une application contractante par rapport à la norme uniforme : $\|F(f) - F(g)\|_\infty < C\|f - g\|_\infty$ avec $C < 1$. Alors, il existe une unique solution à l'équation $F(f) = f$ qui peut être obtenue par la limite $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(f)$.*

1.3 Séries de Fourier pour les fonctions continues

Le développement d'une fonction f sur $[0, 1]$ en une série de la forme

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} s_n \sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n \cos(2\pi nx) \tag{1.1}$$

est appelé développement de Fourier ou série de Fourier. Nous avons vu en introduction que cela pouvait être très utile, mais nous n'avons pas encore étudié l'existence ou l'unicité d'un tel développement. Regardons cela maintenant dans le cadre des fonctions continues f.

En fait, nous verrons que ces questions se résolvent naturellement une fois que nous avons trouvé le « bon espace fonctionnel », mais il est instructif de les poser dès maintenant.

La première question est : comment déterminer les coefficients s_n, c_n ? La clé est le lemme suivant.

Lemma 1.8. *Les relations d'orthogonalité suivantes sont vérifiées pour des entiers $m, n \geq 0$:*

Orthogonalité cosinus-cosinus :

$$\int_0^1 \cos(2\pi nx)\cos(2\pi mx)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{if } n = m = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{if } n = m \neq 0, \\ 0, & \text{if } n \neq m. \end{cases}$$

Orthogonalité sinus-sinus :

$$\int_0^1 \sin(2\pi nx)\sin(2\pi mx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0 \text{ or } m = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{if } n = m \neq 0, \\ 0, & \text{if } n \neq m. \end{cases}$$

Orthogonalité sinus-cosinus :

$$\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi mx)\,dx = 0 \quad \forall n, m.$$

Démonstration. La preuve est une simple conséquence des identités trigonométriques et de leurs intégrales et est laissée en exercice. □

Grâce à cette observation, si l'on s'attend à ce que la représentation ci-dessus soit valide sous une certaine forme, alors les coefficients s_n, c_n doivent être donnés par :

— Coefficients cosinus

$$c_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)\,dx, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Pour le terme constant c_0, on a

$$c_0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

— Coefficients sinus s_n :

$$s_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx)\, dx, \quad \text{for } n \geq 1.$$

Remarquons que si nous voulons que l'égalité soit vérifiée aux extrémités, alors nous devons avoir $f(0) = f(1)$, car cela est aussi valable pour chaque fonction dans la série.

Il est surprenant de constater que l'existence et l'unicité du développement en série de Fourier ne sont pas du tout évidentes, même pour les fonctions continues !

En effet, la compréhension des contre-exemples a évolué avec le temps. Une première observation est la suivante :

— Il existe une fonction continue f satisfaisant $f(0) = f(1)$ dont la série de Fourier converge ponctuellement partout mais ne converge pas uniformément. Il n'est pas facile de construire une telle fonction, mais une fois donnée, il est aisé de vérifier ce phénomène (probablement en exercice).

Une affirmation encore plus frappante provient de la seconde moitié du XIXe siècle, avec Du Bois-Reymond :

— Il existe des fonctions continues $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = f(1)$ dont la série de Fourier diverge en un point $x \in [0,1]$.

Ce résultat a ensuite été généralisé par plusieurs mathématiciens qui ont trouvé des fonctions continues $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = f(1)$ dont la série de Fourier diverge en une infinité de points.

Enfin, la situation n'est pas complètement désespérée :

Proposition 1.9. *Soit $f \in C^2([0,1])$ une fonction deux fois continûment différentiable, satisfaisant $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$. Alors, sa série de Fourier*

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n \leq N} (s_n \sin(2\pi nx) + c_n \cos(2\pi nx),$$

converge par rapport à la norme uniforme $|\cdot|_\infty$.

Remark 1.10. *En réalité, ce résultat reste valable sous des conditions bien moins contraignantes, par exemple pour les fonctions Hölderiennes, c'est-à-dire vérifiant $|f(x) - f(y)| < |x - y|^a$ pour un certain $a > 0$. Cependant, la preuve nécessite plus de précautions et dépasse notre cadre.*