Exam 19 Juin 2024

Nom : ....

Prénom : ....

Numéro sciper : ....

- L'examen durera **trois heures.**
- Veuillez écrire **votre nom et votre numéro sciper** sur cette feuille.
- Stylo et cerveau uniquement - aucun appareil électronique ni support papier ne seront autorisés, ni aucune discussion.
- Stylo noir ou bleu, pas de couleurs, pas de crayon.
- Notez vos réponses sur la **feuille blanche** uniquement. Si vous avez besoin de plus de place, vous trouverez des pages blanches supplémentaires prévues à cet effet à la fin de ce cahier de composition. Si cela ne suffit toujours pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants (et dans ce cas, référencez précisément l'exercice que vous résolvez).
- Seules les feuilles agrafées au cahier de composition seront collectées.
- Les quatre premières questions sont **indépendantes** et **rapportent approximativement le même nombre de points**. Par ailleurs, les trois parties de chaque question seront notées indépendamment.
- Les questions supplémentaires sont à aborder après avoir terminé les 4 premières questions.
- Vous pouvez citer tout résultat du cours (notes + exercices) sans preuve, sauf mention explicite du contraire ou sauf si on vous demande de le prouver.
- Vous pouvez répondre en français ou en anglais.
- N'enlevez pas l'agrafe.

Q. 1	**Q. 2**	**Q. 3**	**Q. 4**	**Q. 5 (extra)**

Total	**Mark**

Bonne chance...

Question 1

1. *Give an example of a measure space* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *such that* $\{x\} \in \mathcal{F}$ *and* $\mu(\{x\}) = 0$ *for all* $x \in \Omega$, *but* $\mu(\Omega) = 1$. *What if we ask* $\mu(E) = 0$ *for every countable set* E*?*

2. *State the existence and uniqueness result for Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^n$. *Prove that the Lebesgue measure is translation invariant: i.e. we have that* $\mu(E) = \mu(a + E)$ *for every* $a \in \mathbb{R}^n$ *and* $E \in \mathcal{F}_B$. *Here* $\mathcal{F}_B$ *is the Borel sigma algebra and* $a + E = \{a + x : x \in E\}$.

3. *Is there a measure* μ *on* $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_B)$ *such that for all subsets* $E \in \mathcal{F}_B$, $\mu(E)$ *are different real numbers and* $\mu(\mathbb{R}) < \infty$*?*

Question 1

1. *Donnez un example d'espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *tel que* $\{x\} \in \mathcal{F}$ *et* $\mu(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in \Omega$, *mais tel que* $\mu(\Omega) = 1$. *Que se passe-t-il si l'on demande* $\mu(E) = 0$ *pour tout* $E \subset \mathcal{F}$ *dénombrable?*

2. *Enoncez le théorème d'existence et unicité pour la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$. *Prouvez que la mesure de Lebesgue est invariante par translation, i.e. que* $\mu(E) = \mu(a + E)$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $E \in \mathcal{F}_B$. *Ici* $\mathcal{F}_B$ *dénote la tribu de Borel et* $a + E = \{a + x : x \in E\}$.

3. *Existe-il une mesure* μ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_B)$ *telle que pour tout sous-ensemble* $E \in \mathcal{F}_B$, $\mu(E)$ *sont des réels différents et* $\mu(\mathbb{R}) < \infty$*?*

Question 2

1. *Give a definition of the Lebesgue integral of a measurable function on* $[0, 1]$.
2. *Prove that the function* $x \mapsto x^s$ *is Lebesgue integrable on* $(0, 1]$ *if and only if* $s > -1$.
3. *Prove that every bounded measurable function on* $[0, 1]$ *is Lebesgue integrable. Is the same true for the Riemann integral?*
4. *Give an example of a measurable function* f *on* $[0, 1]$ *such that* f *is bounded on* $[0, 1 - \epsilon]$ *for all* $\epsilon > 0$, *but is not integrable on* $[0, 1]$.

Question 2

1. *Donner la définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable sur* $[0, 1]$.
2. *Prouver que* $x \mapsto x^s$ *est Lebesgue-intégrable sur* $(0, 1]$ *si et seulement si* $s > -1$.
3. *Prouver que toute fonction mesurable bornée sur* $[0, 1]$ *est Lebesgue-intégrable. Est-ce aussi vrai pour l'intégrale de Riemann?*
4. *Donner un exemple d'une fonction mesurable* f *sur* $[0, 1]$ *telle que* f *est bornée sur* $[0, 1-\epsilon]$ *pour tout* $\epsilon > 0$, *mais n'est pas intégrable sur* $[0, 1]$.

Question 3

1. *Give a definition of a real-valued square-integrable function on* $[0,1]$. *Give also a definition of the space* $\mathcal{L}^2([0,1])$.

2. *For* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *such that* f^4 *is integrable, define* $\|f\|_4 := (\int_{[0,1]} |f|^4(x)d\lambda(x))^{1/4}$. *Which properties of the norm does* $\|\cdot\|_4$ *satisfy? Can you give a space on which it defines a norm?*
Hint: You may use Hölder's inequality: for $p, q > 1$ *such that* $1/p + 1/q = 1$ *and two measurable functions* f, g*, one has*

$$\int_{[0,1]} |fg| d\lambda \leq \left(\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[0,1]} |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}},$$

provided that the integrals in the right-hand side are well-defined.

3. *Is there an associated inner product* $\langle f, g \rangle$ *such that* $\|f\|_4^2 = \langle f, f \rangle$*?*

Question 3

1. *Donnez une définition d'une fonction de carré intégrable sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles. Donnez aussi une définition de l'espace* $\mathcal{L}^2([0,1])$.

2. *Pour* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *telle que* $|f|^4$ *est intégrable, définissons* $\|f\|_4 := (\int_{[0,1]} f^4(x)d\lambda(x))^{1/4}$. *Quelles propriétés d'une norme* $\|\cdot\|_4$ *satisfait ? Pouvez-vous donner un exemple d'espace sur lequel* $\|\cdot\|_4$ *définit une norme?*
Indice: Vous pouvez utiliser l'inégalité de Hölder: pour $p, q > 1$ *tels que* $1/p + 1/q = 1$ *et pour deux fonctions mesurables* f, g*, on a*

$$\int_{[0,1]} |fg| d\lambda \leq \left(\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[0,1]} |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}},$$

pourvu que les intégrales dans le terme de droite soient finies.

3. *Existe-il un produit scalaire* $\langle f, g \rangle$ *tel que* $\|f\|_4^2 = \langle f, f \rangle$*?*

Question 4

1. *Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be integrable. Define the Fourier coefficients $(\mathcal{F}(f)(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.*

2. *Let $f \in C^k([0,1])$ such that $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1)$ for all $0 \leq j \leq k$. Show that for all $j = 1, \ldots, k$, $\mathcal{F}(\frac{d^j f}{dx^j})(n) = (2\pi i)^j n^j \mathcal{F}(f)(n)$.*

3. *Let now $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Write a series expansion of f using Fourier series. In which sense is this expansion defined? State the relevant theorems.*

4. *Find a solution of the equation $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\Delta(\Delta f(t,x))$ on $(0,+\infty)\times[0,1]$, where Δ is the Laplacian, together with the initial conditions $f(0,\cdot) = u \in L^2([0,1])$.*

   <u>Hint</u>: You can use the following result for derivatives of series: let $(f_n)_{n\geq 1} \subset C^1([0,1|,\mathbb{R})$ be such that the series $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ and $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ each converge pointwise absolutely to a bounded function. Then $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ with derivative $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$.

Question 4

1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable. Définissez les coefficients de Fourier $(\mathcal{F}(f)(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.*

2. *Soit $f \in C^k([0,1])$ telle que $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1)$ pour tout $0 \leq j \leq k$. Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, k$, $\mathcal{F}(\frac{d^j f}{dx^j})(n) = (2\pi i)^j n^j \mathcal{F}(f)(n)$.*

3. *Considérons maintenant $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Ecrivez une expansion en série de f en utilisant les séries de Fourier. En quel sens peut-on dire que la série converge ? Enoncez les principaux théorèmes.*

4. *Trouvez une solution à l'équation $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\Delta(\Delta f(t,x))$ sur $(0,+\infty)\times[0,1]$, où Δ est le Laplacien, avec les conditions initiales $f(0,\cdot) = u \in L^2(]0,1])$.*

   <u>Indice</u>: Vous pouvez utiliser le résultat suivant concernant la dérivée d'une série : soit $(f_n)_{n\geq 1} \subset C^1([0,1|,\mathbb{R})$ telle que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ chacune converge ponctuellement absolument vers une fonction bornée. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ avec dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$.

Question 5 (Additional questions)

- *Prove that the operator*

$$T: L^2([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow L^2([0,1],\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \left(t \mapsto \int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)$$

  is bounded and compact but has no eigenvalues. Why does the spectral theorem not apply?

- *Prove the hint in Question 4.*

- *Let* $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^1([0,1])$ *be uniformly integrable, i.e. for all* $\epsilon > 0$*, there exists* K *such that* $\int |f_n| 1_{|f_n|>K} \mathrm{d}\lambda < \epsilon$ *for all* $n \geq 1$*. Prove that if* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converges almost everywhere, then it converges in* $L^1([0,1])$*.*

Question 5 (Questions supplémentaires)

- *Prouvez que l'opérateur*

$$T: L^2([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow L^2([0,1],\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \left(t \mapsto \int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)$$

  est borné et compact mais n'admet pas de valeur propre. Pourquoi le théorème spectral ne s'applique-t-il pas ?

- *Prouvez l'indice de la question 4.*

- *Soit* $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^1([0,1])$ *uniformément intégrable, c.à.d. pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* T *tel que* $\int |f_n| 1_{|f_n|>K} \mathrm{d}\lambda < \epsilon$ *pour tout* $n \geq 1$*. Prouvez que si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge presque partout, alors la convergence a aussi lieu dans* $L^1([0,1])$*.*