ANALYSE IV POUR PHYSICIENS

JUHAN ARU

Section 0

Introduction et motivation

Comme motivation, considérons la description mathématique de la transmission de chaleur sur une tige circulaire homogène : l'équation de la chaleur.

L'équation de la chaleur sur un intervalle $[0, 1)$ (décrivant la tige) est donnée par l'évolution du profil de température

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D\Delta u(t,x)$$

accompagnée d'une condition initiale $u_0(x) = u(0,x)$ et de la condition aux bords $u(t,0) = u(t,1)$ pour tout $t \geq 0$ afin d'exprimer que les extrémités de la tige sont connectées. Rappelons que dans le cas 1D $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et que $D > 0$ est le coefficient de diffusion.

L'idée révolutionnaire de Fourier était la suivante. Il a remarqué empiriquement que le profil de chaleur au fil du temps présente un comportement oscillatoire spatial et, motivé également par la solution de l'équation des ondes à l'aide des ondes, il a proposé d'écrire toute solution en utilisant des fonctions oscillantes spatialement telles que $f_n(x) = \sin(2\pi x)$ et $g_n(x) = \cos(2\pi nx)$. Plus précisément, on pourrait essayer de trouver une solution de la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} s_n(t)\sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n(t)\cos(2\pi nx).$$

Mais remarquons maintenant que $\Delta f_n = -4D\pi^2 n^2 f_n$ et ainsi si nous essayons une solution de la forme $u_n(x,t) = f_n(x)s_n(t)$ avec f_n comme ci-dessus, nous obtenons une équation

$$\frac{\partial s_n(t)}{\partial t} = -4D\pi^2 n^2 s_n(t).$$

Il s'agit d'une EDO bien connue qui se résout facilement : $s_n(t) = \exp(-4D\pi^2 n^2 t)s_n(0)$. De même, pour les termes en cosinus, on obtient $c_n(t) = \exp(-4D\pi^2 n^2 t)c_n(0)$.

Nous concluons qu'il serait logique de proposer une solution de la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} s_n(0)\exp(-D4\pi n^2 t)\sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n(0)\exp(-D4\pi n^2 t)\cos(2\pi nx).$$

Remarquez que la condition initiale se traduit alors par la condition :

$$u_0 = \sum_{n\geq 1} s_n(0)\sin(2\pi nx) + \sum_{n\geq 0} c_n(0)\cos(2\pi nx).$$

Si nous trouvons de tels $(s_n(0), c_n(0))_{n\geq 0}$, alors nous avons peut-être trouvé au moins une solution à l'équation de la chaleur sur la tige circulaire.

Cela peut sembler très convaincant, mais en y regardant de plus près, plusieurs questions se posent ici :

(1) Nous avons des sommes infinies - convergent-elles même ? Quand convergent-elles et en quel sens ?
(2) Pour quelles fonctions u_0 l'expansion donnée ci-dessus est-elle valable ? En d'autres termes, pour quelles conditions initiales peut-on trouver une solution par cette méthode ?

(3) De telles expansions sont-elles uniques ? Les solutions que nous trouvons sont-elles uniques ?
(4) Peut-on approximer des solutions ? Par exemple, cela est pertinent lors de la résolution numérique de l'équation. C'est une question de convergence - et plus loin, comment la notion de convergence se rapporte-t-elle aux coefficients s_n, c_n ?
(5) Plus généralement, comment mesurer la proximité de différentes conditions initiales, de différentes solutions ?
(6) Que se passe-t-il pour des tiges non circulaires, par exemple des tiges avec des extrémités dans des bains thermiques ? Ou en dimensions supérieures ?
(7) Qu'en est-il d'un cas plus non homogène où D n'est plus une constante dans l'espace ? Ou lorsque nous remplaçons Δ par des opérateurs (linéaires) plus généraux, incluant par exemple certaines influences extérieures ?

L'objectif de ce cours est d'étudier le cadre mathématique adéquat pour poser et répondre à ces questions. Cela nous amènera à étudier des espaces de fonctions, l'intégrale de Lebesgue et la théorie spectrale des opérateurs linéaires. Pour comprendre pourquoi certains de ces aspects pourraient intervenir, considérons un modèle simplifié.

0.1 Un modèle discret

Pour comprendre ce que nous pouvons espérer obtenir, considérons le même problème de diffusion de chaleur mais sur un espace discrétisé. Par exemple, nous pensons que la tige est décomposée en n petits récipients pouvant échanger de la chaleur entre leurs voisins.

Le profil de température est maintenant donné par $u(x,t) : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, avec la condition de périodicité $u(0,t) = u(n,t)$ pour tout $t \geq 0$.

L'évolution est toujours donnée par

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = K\Delta_d u(t,x)$$

avec une condition initiale $u_0(x) = u(0,x)$, mais au lieu du laplacien réel, nous avons le laplacien discret $\Delta_d f(x) := \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} f(y) - f(x)$, où $y \sim x$ signifie que y, x sont des voisins dans le graphe discret sous-jacent et d_x est le nombre de voisins du sommet x. Dans notre cas concret, nous avons un graphe circulaire avec n sommets et donc $\Delta_d f(x) := \frac{f(y)+f(z)-2f(x)}{2}$, où y, z désignent les sommets voisins.

Remarquez maintenant que le problème est réellement un système de n équations différentielles ordinaires de second degré et que Δ_d est simplement un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Comment le résoudre ?

Utilisons les mêmes étapes que ci-dessus mais voyons qu'elles ont ici un sens très simple et concret :

- Remarquez que chaque u_t peut être vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec des coordonnées et que Δ_d peut être vu comme un opérateur linéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ (vérifiez-le !)
- En tant que tel, Δ_d peut être diagonalisé : il existe une base orthonormale $\phi_1, \ldots, \phi_n$ et des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que $\Delta_d\phi_i = \lambda_i\phi_i$. En particulier, toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut être écrite de manière unique comme $\sum_{i=1}^n c_i\phi_i$.

- Mais maintenant, si nous écrivons $u_i(t) := c_i(t)\phi_i$, alors à nouveau chaque $c_i(t)$ satisfait une EDO découplée
$$\frac{\partial c_i(t)}{\partial t} = K\lambda_i s_n(t)$$
et a donc pour solution $c_i(0)\exp(K\lambda_i t)$.
- Nous concluons une solution en trouvant $c_i(0)$ en déterminant l'expansion unique $u_0 := \sum_{i=1}^n c_i(0)\phi_i$.
- Étant donné l'unicité de l'expansion, cette solution est également unique.
- Et enfin, nous pouvons facilement comparer les solutions en utilisant par exemple la norme euclidienne. Par exemple, on conclut que si les conditions initiales sont proches, les solutions le seront aussi pour tout $t > 0$. Nous savons également que cette distance se mesure de manière équivalente en utilisant les distances entre deux ensembles de coefficients $(c_i)_{i=1\dots n}, (\tilde{c}_i)_{i=1\dots n}$ - et ici, l'utilisation de la norme euclidienne au lieu d'une autre norme est importante.

Ainsi, dans ce cadre, tout fonctionne très bien et fonctionnerait tout aussi bien tant que nous avons un opérateur linéaire symétrique L à la place de Δ_d.

Que nous avons-nous utilisé ici ?

- Nous avons utilisé le fait que $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et qu'il existe donc des bases qui donnent des développements uniques pour chaque vecteur
- Nous avons utilisé le fait que Δ_d est linéaire et symétrique et que, selon le théorème spectral, il peut être diagonalisé et nous pouvons trouver une base de vecteurs propres
- Nous avons implicitement utilisé la linéarité de l'équation

Aucune de ces affirmations n'est évidente dans notre configuration initiale, car l'espace des fonctions de $[0, 1]$ à $\mathbb{R}$ n'est plus de dimension finie !

Pour y remédier, nous devrons examiner les espaces de fonctions et essayer de voir tout d'abord quels espaces de ce type possèdent une structure agréable. Par exemple, quels espaces de fonctions satisfont la linéarité ? Lesquels permettent de définir une norme et de parler d'orthonormalité ? Pour quels espaces avons-nous des développements orthonormaux ?

La recherche de telles propriétés agréables nous amène par exemple à introduire l'intégrale de Lebesgue pour construire de belles bases de fonctions.

Après cela, après avoir passé un certain temps à comprendre les espaces de fonctions, nous étudierons brièvement les opérateurs linéaires sur de tels espaces et, en particulier, nous trouverons des configurations dans lesquelles il existe des décompositions orthonormales similaires à l'aide de fonctions propres. Nous réunirons ensuite tous ces éléments pour expliquer rigoureusement la résolution de l'équation de la chaleur non homogène et d'autres problèmes similaires.

Mais c'est déjà assez d'introduction, allons-y !

Section 1

L'espace des fonctions continues

Commençons par l'un des espaces de fonctions les plus intuitifs : l'espace des fonctions continues. Ceci constitue en partie un rappel, car vous avez déjà travaillé avec des fonctions continues en Analyse I-III, et nous ne faisons ici que les replacer dans un contexte plus large.

Pour commencer, les fonctions prennent leurs valeurs sur des domaines D rectangulaires i.e. du forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, r_n]$ dans $\mathbb{R}^n$ et prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. À la fin de la section, nous discuterons dans quelle mesure il est possible (et souhaitable) de généraliser ces choix. Vous pouvez sans problème supposer que $D = [0, 1]$, car le choix d'autres domaines fermés et bornés ne présente pas de difficultés supplémentaires.

L'ensemble de toutes les fonctions continues de D vers $\mathbb{R}$ sera noté $C(D, \mathbb{R})$:

$$C(D, \mathbb{R}) := \{f : D \to \mathbb{R}, f \text{ continu}\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons essayer de comprendre la structure de cet espace.

1.1 Structure d'espace vectoriel de $C(D, \mathbb{R})$

La première observation que nous pouvons faire à propos de l'espace $C(D, \mathbb{R})$ est qu'il possède une structure linéaire, comme par exemple l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, +)$: si $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, alors la fonction $h(x) := f(x) + g(x)$ appartient également à $C(D, \mathbb{R})$, tout comme la fonction $\lambda f(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vérifions rapidement cette propriété pour la première affirmation : pour chaque $x \in D$, par continuité de f, g, nous pouvons choisir δ_f, δ_g tels que si $y \in D, \|x - y\| < \delta_f$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et si $y \in D, \|x - y\| < \delta_g$, alors $|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Cela signifie que si $\|x - y\| < \min(\delta_f, \delta_g)$, on a $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ grâce à l'inégalité triangulaire.

Exercise 1.1. *Montrez que $C(D, \mathbb{R})$ possède également une structure multiplicative : c'est-à-dire que si $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, alors le produit $h(x) := f(x)g(x)$ appartient également à $C(D, \mathbb{R})$. Qu'en est-il de la fonction $\max(f, g)$?*

En fait, l'espace $C(D, \mathbb{R})$ avec l'addition satisfait tous les axiomes d'un espace vectoriel ! L'élément neutre est simplement la fonction nulle constante, et l'élément inverse de f est la fonction $-f$. Toutes les conditions sont respectées, comme vous pouvez facilement le vérifier.

Exercise 1.2. *Rappelez-vous des axiomes d'un espace vectoriel et vérifiez-les dans le cas de $(C(D, \mathbb{R}), +)$.*

Dans la suite, nous appellerons souvent l'espace vectoriel simplement $C(D, \mathbb{R})$.

Nous pourrions également nous intéresser à la somme d'un nombre infini de fonctions, c'est-à-dire à des sommes du type $\sum_{n \geq 1} f_n$. Mais dans quel sens pouvons-nous en parler ? Plus généralement, étant donné une suite $(g_n)_{n \geq 1}$, dans quel sens pouvons-nous parler de sa convergence et de sa limite ?

La première idée pourrait être de définir des limites point par point : pour chaque $x \in D$, la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ est simplement une suite de nombres réels, et nous savons ce que signifie sa convergence. Nous pourrions donc définir la convergence de $(g_n)_{n \geq 1}$ en tant que fonctions comme la convergence de $(g_n(x))_{n \geq 1}$ pour tout $x \in D$. C'est ce qu'on appelle la convergence ponctuelle, mais elle présente un inconvénient bien connu :

Exercise 1.3. *Trouvez une suite de fonctions de* $C(D, \mathbb{R})$ *qui converge ponctuellement vers une fonction qui n'est pas continue.*

Il est conseillé de commencer par le cas $D = [0, 1]$ (discuté en cours), puis de réfléchir à la manière de procéder dans le cas général.