Remarque.
Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Pour vérifier le théorème de Stokes, procéder de la manière suivante :

(i) Esquisser la surface Σ, puis calculer $\text{rot}F(x, y, z)$.

(ii) Donner une paramt́risation $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ de la surface Σ et donner un vecteur normal. Ajouter ce dernier à votre esquisse.

(iii) Exprimer

$$\iint_\Sigma \text{rot}F \cdot ds$$

comme intégrale double où les bornes et la fonction à intégrer sont indiquées explicitement.

(iv) Ecrire $\partial\Sigma$ comme réunion de courbes simples régulières ; pour chacune d'elles, donner une paramétrisation et préciser son sens de parcours induit par la paramétrisation de Σ et l'orientation positive de ∂A.

(v) Exprimer

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$$

comme somme d'intégrales où les bornes et les fonctions à intégrer sont indiquées explicitement.

(vi) Vérifier la conclusion du théorème de Stokes pour Σ et F.

Exercice 1 (ex 7.7 p. 89, corrigé p. 97)**.**
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = (0, x^2, 0)$ et Σ le triangle de sommets $(1, 0, 0), (2, 2, 0)$ et $(1, 1, 0)$.

Exercice 2 (ex 7.6 p. 89, corrigé p. 96)**.**
Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = \big(0, 0, y + z^2\big)$ et

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x, y, z \geq 0,\ 0 \leq \arccos\frac{z}{2} \leq \arctan\frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Exercice 3 (ex 14.1 p. 219, corrigé p. 223)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{(x-\pi)}$ sur $[0, 2\pi[$.

(i) Esquisser le graphe de f et le graphe de f'.

(ii) Calculer la série de Fourier Ff de la fonction f.

(iii) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer Ff et f sur $[0, 2\pi]$.

(iv) A l'aide des deux questions précédentes, montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}}.$$

Exercice 4 (ex 14.2 p. 220, corrigé p. 224)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = (x - \pi)^2$ sur $[0, 2\pi[$.

(i) Esquisser le graphe de f et le graphe de f'.

(ii) Calculer la série de Fourier Ff de la fonction f.

(iii) A l'aide du théorème de Dirichlet, comparer Ff et f sur $[0, 2\pi]$.

(iv) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et périodiques de période 2π. On considère la fonction

$$h(t) = \int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau.$$

(i) Exprimer les coefficients de Fourier **complexes** de h en fonction de ceux de f et g.

(ii) En déduire les coefficients de Fourier **réels** de h en fonction de ceux de f et g.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 $\frac{4}{3}$

Exercice 2 $\frac{8}{3} - \pi$

Exercice 3 (ii) $Ff(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+n^2} \cos(nx) - \frac{2n}{1+n^2} \sin(nx) \right)$

Exercice 4 (ii) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$.