EPFL – Automne 2024	D. Strütt
Analyse III – GC IN	**Exercices**
Série 3	26 septembre 2024

Remarque.
Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Exercice 1.
Paramétrer les courbes suivantes

1. $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3 = y^2,\ x \leq 3\}$
2. $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\}$
3. $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2(2x+1)y + (2x+1)^2 = 0,\ 1 \leq y \leq 3\}$
4. $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9,\ y \geq x\}$.

Exercice 2 (ex 2.1, p. 17, corrigé p. 18)**.**

(*i*) Soit $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ x \in [a,b]\right\}$. Montrer que :

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

(*ii*) En déduire la longueur de la courbe

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \cosh x,\ x \in [0,1]\right\}.$$

(*iii*) Soit $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x(t) = r(t)\cos t;\ y(t) = r(t)\sin t,\ t \in [a,b]\right\}$.
Calculer la longueur de Γ en fonction de r.

Exercice 3 (ex 2.4, p. 18, corrigé p. 20)**.**
Calculer $\int_\Gamma f\, dl$ lorsque $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \sqrt{2z}$ et

$$\Gamma = \left\{\gamma(t) = \left(\cos t,\ \sin t,\ \frac{1}{2}t^2\right) : t \in [0,1]\right\}.$$

Indication : $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$.

Exercice 4 ($4^{\text{è}}$ v. ex 2.2, p. 17, corrigé p. 19/$3^{\text{è}}$ v. ex 2.2, p. 11, corrigé p. 166)**.**
On considère $F(x,y) = (xy,\ y^2 - x)$ et

$$\Gamma_1 = \{(t,t) :\ t \in [0,1]\}, \quad \Gamma_2 = \left\{(t, e^t) :\ t \in [0,1]\right\}, \quad \Gamma_3 = \left\{\left(\sqrt{t}, t^2\right) :\ t \in [1,2]\right\}.$$

Calculer $\int_{\Gamma_i} F \cdot dl$ pour $i = 1,2,3$.

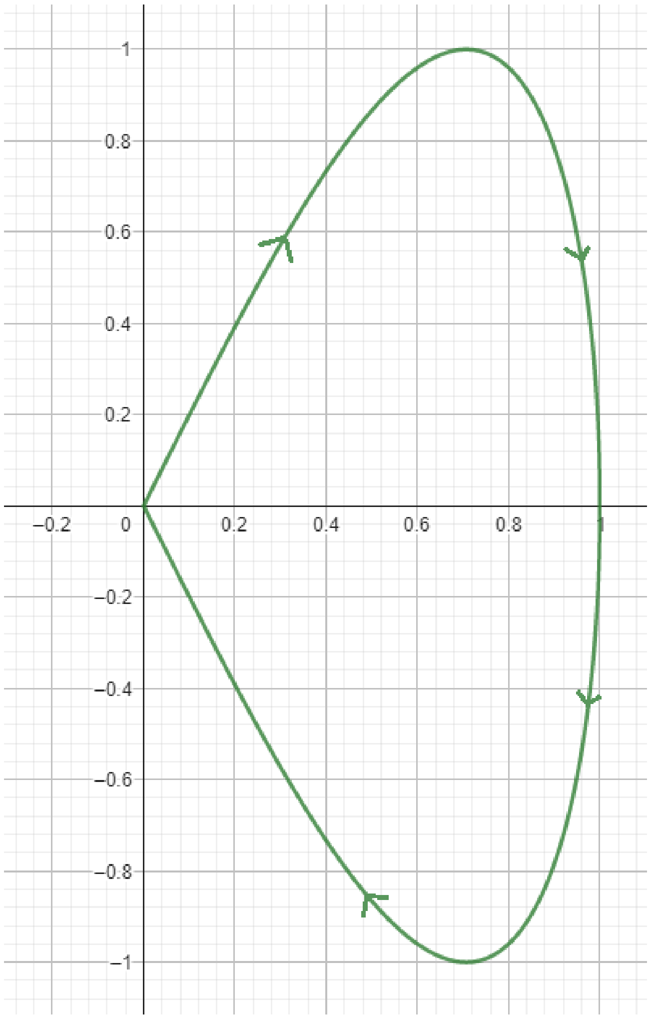
Exercice 5 ($4^{\text{è}}$ v. ex 2.3, p. 17, corrigé p. 19/$3^{\text{è}}$ v. ex 2.3, p. 12, corrigé p. 166)**.**
Calculer $\int_\Gamma F \cdot dl$ quand

(*i*) $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$, $\quad F(x,y,z) = (x,z,y)$;

(*ii*) $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : y = e^x,\ z = x,\ x \in [0,1]\}$, $\quad F(x,y,z) = (x,y,z)$.

Exercice 6 (ex 2.6, p. 18, corrigé p. 20)**.**
Soient $F(x,y) = (x+y, -x)$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0,\ x \geq 0\}$ paramétrée par $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$ avec $t \in [0, \pi]$.

1. Montrer que γ est bien une paramétrisation de Γ.
2. Calculer $\int\limits_{\Gamma} F \cdot dl$.



Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 (ii) $\frac{e-e^{-1}}{2}$

(iii) $\int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}dt$

Exercice 3 $-\frac{1}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$

Exercice 4

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = \frac{689}{30} - \frac{16}{5}\sqrt{2}$$