Remarque.
Les théorèmes énoncés dans la présente série sont des rappels d'analyse II

Notation.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, tel que $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq m$. On note

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_i}\right).$$

Exercice 1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq m$. Montrer que

(*i*)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\rangle\right] = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}, \boldsymbol{G}\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{F}, \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i}\right\rangle,$$

où pour $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle a, b\rangle$ le *produit scalaire euclidien* de a et b, c'est-à-dire,

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

(*ii*) si $n = 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G}\right] = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} \wedge \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i}$$

où pour $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, on note $a \wedge b \in \mathbb{R}^3$ le *produit vectoriel* de a et b, c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Théorème.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ $f \in C^1(\Omega')$ et $g = (g_1, \ldots, g_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que $g(\Omega) \subset \Omega'$. Alors, le produit de composition $f \circ g \in C^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Exercice 2. (*i*) Soit $p \geq 1$ et la fonction

$$h_p(x) := |x|^p = \left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)^p, \quad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Calculer $\nabla h_p(x)$.

(*ii*) Soit une application $\boldsymbol{G} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qui ne s'annule jamais et la fonction

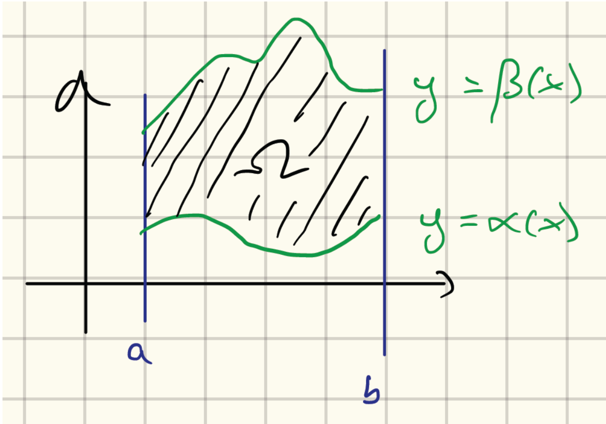
$$f_p(t) := \frac{1}{p}|\boldsymbol{G}(tx)|^p, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\dfrac{d}{dt} f_p(t)$.

Définition.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(i) On dit que Ω est *y-simple* si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\alpha, \beta \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $\forall x \in]a,b[$, $\alpha(x) < \beta(x)$ tels que

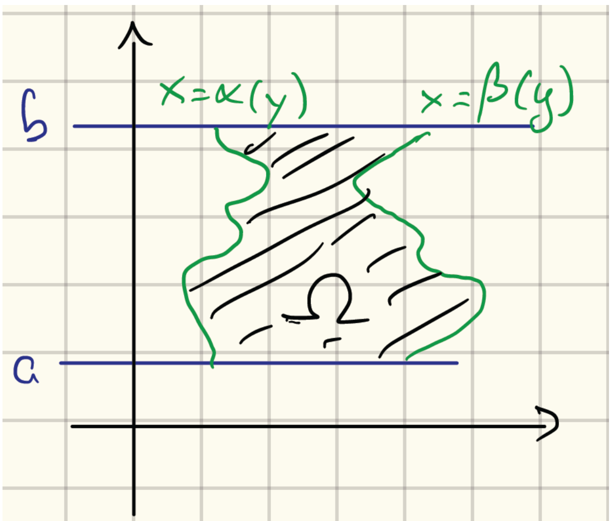
$$\boxed{\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}}$$



On a alors que
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dydx.$$

(ii) On dit que Ω est *x-simple* si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\alpha, \beta \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $\forall y \in]a,b[$, $\alpha(y) < \beta(y)$ tels que

$$\boxed{\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \in [a,b],\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}}$$



On a alors que
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dxdy.$$

Exercice 3.
Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x)dx$ dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,1], 0 \le y \le x\}$, $f(x,y) = xy$.

(ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \le y \le 2x, x \ge 1\}$, $f(x,y) = \frac{2}{x}$.

(*iii*) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3,\ x-3 \le y \le 3-x\}$ et $f(x,y) = x^2 + \sin^3(y)$

(*iv*) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad -1 \le y,\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \le x \le -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\}$, $f(x,y) = y\sin(xy)$.

Définition (Matrice jacobienne, Jacobien)**.**
Soit $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ telle que

— $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\Omega; \Omega')$

— $\boldsymbol{u}$ est inversible et $\boldsymbol{u}^{-1} \in C^\infty(\Omega'; \Omega)$

La *matrice Jacobienne* de $\boldsymbol{u}$ notée $\nabla \boldsymbol{u}$ est la matrice dont les composantes sont

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{i,j} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j}$$

Le *jacobien* de $\boldsymbol{u}$, noté $\operatorname{Jac} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ est défini par

$$\operatorname{Jac} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \det \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$$

Théorème (Voir aussi §8.5 du live *Analyse avancée pour ingénieurs*)**.**
Soit $f \colon \Omega' \to \mathbb{R}$ continue, $\boldsymbol{u} \colon \Omega \to \Omega'$ comme dans la définition ci-dessus et $A \subset \Omega'$ un ensemble fermé borné. Alors

$$\int_A f(\boldsymbol{y}) dy = \int_{\boldsymbol{u}^{-1}(A)} f(\boldsymbol{u}(x)) \left|\operatorname{Jac} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right| dx$$

Exercice 4.
On admettra sans démonstration que si $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ sont trois points non-alignés $A = \{(t_1, t_2)\ :\ 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1 - t_1\}$ et $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par

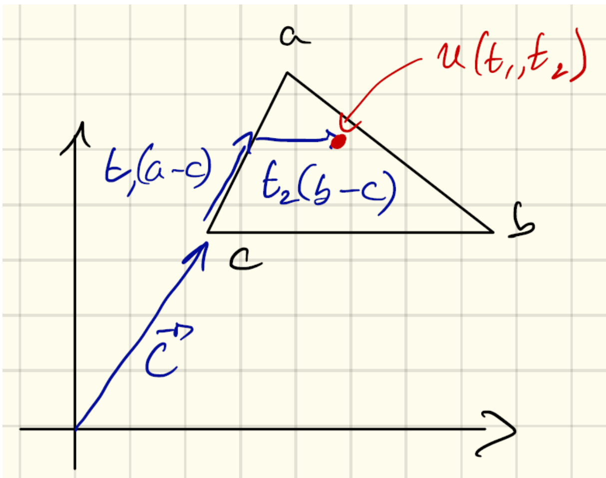
$$u(t_1, t_2) = t_1 a + t_2 b + (1 - t_1 - t_2)c = c + t_1(a - c) + t_2(b - c),$$

Alors,

— u est inversible,

— $u, u^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$,

— $u(A)$ est le triangle de sommets a, b et c.



(*i*) Calculer le jacobien de u.

(*ii*) Calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses trois sommets a, b et c.
Rappel : L'aire d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\iint_\Omega 1 dx dy$$

Exercice 5 (Voir aussi §8.5 du live *Analyse avancée pour ingénieurs*).
Calculer le jacobien des applications suivantes :

(i) Les coordonnées polaires
$$\boldsymbol{u}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(ii) Les coordonnées sphériques
$$\boldsymbol{u}(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

(iii) Les coordonnées cylindriques
$$\boldsymbol{u}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

(iv) Les coordonnées carthésiennes.
$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x,y,z)$$

Exercice 6.
Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x)dx$ dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ et $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$ et $f(x,y,z) = \frac{z}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}$

(iii) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$ et $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$
Rappel :
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(t - \sin(t)\cos(t)\right)\right] = \sin^2(t)$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right)\right] = \cos^2(t)$$

Remarque.
Le but de l'exercice suivant est d'établir des formules qui nous permettent de trouver une primitive des fonctions $\sin^n(x)$ et $\cos^n(x)$ qui seront utiles dans les calculs tout au long du semestre. La méthode (i.e. transformer des puissances de sinus et cosinus en combinaison linéaires de fonctions de la forme $\sin(\alpha x)$, $\cos(\alpha x)$ à l'aide des formules d'Euler et du binôme de Newton) est plus importante que les formules établies ci-dessous.

Exercice 7. (i) (Facultatif) Soit $n \geq 1$ un entier. À l'aide des formules d'Euler, et du binôme de Newton, montrer que si n est pair,
$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n/2-1}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)x\right)$$
$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n/2-1}(-1)^k\binom{n}{k}\cos((n-2k)x)$$

Et si n est impair,
$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)x\right)$$
$$\sin^n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{k}\sin((n-2k)x)$$

Indication : Pour le sinus, utiliser que si n est pair $(-1)^{n-k} = (-1)^k$ et si n est impair, $(-1)^{n-k} = -(-1)^k$

(*ii*) Trouver une primitive des fonctions suivantes :

(a) $\cos^2(x)$
(b) $\sin^2(x)$
(c) $\cos^3(x)$
(d) $\sin^3(x)$
(e) $\cos^4(x)$
(f) $\sin^4(x)$
(g) $\cos^5(x)$
(h) $\sin^5(x)$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 (*i*) $\nabla h_p(x) = p|x|^{p-2}x$

(*ii*) $\frac{df_p}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\boldsymbol{G}(tx)|^{p-2}\, G_i(tx)\frac{\partial G_i}{\partial v_j}(tx)x_j$

Exercice 3 (*i*) $\frac{1}{8}$

(*ii*) 1

(*iii*) $\frac{27}{2}$

(*iv*) 0

Exercice 4 (*i*) Si $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ et $c = (c_1, c_2)$, $\mathrm{Jac}(u)(t_1, t_2) = a_1b_2 + b_1c_2 + a_2c_1 - a_2b_1 - b_2c_1 - a_1c_2$.

(*ii*) $\frac{1}{2}|a_1b_2 + b_1c_2 + a_2c_1 - a_2b_1 - b_2c_1 - a_1c_2|$

Exercice 5 (*i*) r

(*ii*) $-r^2\sin(\varphi)$

(*iii*) r

(*iv*) 1

Exercice 6 (*i*) 4π

(*ii*) 9

(*iii*) $\frac{81}{4}\pi^2$