Remarque.
Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Pour les exercices suivants, on suggère de :

(i) Commencer par esquisser le graphe de f et le graphe de f', sur au moins deux périodes ;

(ii) Vérifier que la fonction f est bien C^1 par morceaux ;

Exercice 1 (ex 14.5 p. 220, corrigé p. 225). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et impaire qui coïncide avec $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

(ii) En utilisant la question (i) et l'identité de Parseval, déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}.$$

Exercice 2 (ex 14.6 p. 220, corrigé p. 226).
A l'aide de l'identité de Parseval, montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \, dx = \frac{3}{4}\pi.$$

Exercice 3 (ex 14.7 p. 220, corrigé p. 226). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = |x| \quad \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

(ii) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\ .$$

Exercice 4.
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x$.

(i) Calculer $F_c f$ et $F_s f$, les séries de Fourier en cosinus et en sinus de la fonction f.

(ii) Comparer les valeurs de $F_c f$, $F_s f$, et f sur $[0, \pi]$.

(iii) En déduire la valeur des deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\ .$$

Exercice 5.
Soit f la fonction 2π-périodique définie dans l'exercice 1 (14.5). Posons

$$F(x) = \int_0^x f(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) La fonction F est-elle 2π-périodique ? Justifier votre réponse.

(ii) En utilisant la série de Fourier de f, trouver la série de Fourier de F. On donnera explicitement le terme constant de cette série.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) $Ff(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$

(ii) $\frac{\pi^6}{960}$

Exercice 3 (i) $Ff(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$

(ii) $\frac{\pi^4}{96}$, $\frac{\pi^4}{90}$

Exercice 4 (i) $F_c f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$, $F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

(iii) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi^2}{8}$