EPFL

Professeurs : S. Basterrechea, A. Michelat, O. Mila - (n/a)
Analyse III
Date : 17.01.2023
Durée : 180 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides, et 17 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, ou si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Formulaire

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2\,a) = 2\cos^2(a) - 1,$$
$$\sin(2\,a) = 2\cos(a)\sin(a),$$
$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$
$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Première partie, questions à choix multiple (+1/0)

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : On considère les champs vectoriels $F = (2e^{2x}y^2, 2e^{2x}y)$ et $G = (y, -x)$ définis sur $\Omega = \mathbb{R}^2$. Les champs vectoriels qui dérivent d'un potentiel sont:

- ☐ F
- ☐ F et G
- ☐ Aucun des deux
- ☐ G

Question 2 : Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ vectoriel défini par $F(x,y) = (-y, x)$, et $\Omega = [-1,1]\times[-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ le carré de côtés de longueur 2, centré à l'origine. Si on oriente le bord du carré $\partial\Omega$ positivement, l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot d\ell$ vaut :

- ☐ 8
- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ -4

Question 3 : Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x\cos(y)\sin(z)}{2}, \frac{y\cos(z)\sin(x)}{2}, \frac{z\cos(x)\sin(y)}{2}\right)$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F))$ vaut :

- ☐ $-\dfrac{4}{3}$
- ☐ 0
- ☐ -2
- ☐ $-\dfrac{2}{3}$

Question 4 : Soit $f(x)$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \dfrac{1}{\pi^5}x^5 - \dfrac{1}{4\pi}x - \dfrac{1}{4}$ pour $x \in]-\pi, \pi]$. Si $Ff(x)$ est la série de Fourier de f, alors

- ☐ $Ff(\pi) = \dfrac{1}{2}$.
- ☐ $Ff(\pi) = -1$.
- ☐ $Ff(\pi) = \dfrac{1}{4}$.
- ☐ $Ff(\pi) = -\dfrac{1}{4}$.

Question 5 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine ouvert et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel tel que $\operatorname{rot}(F) = 0$ sur Ω. Alors:

- ☐ L'intégrale curviligne de F sur toute courbe régulière fermée dans Ω est nulle.
- ☐ F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ F dérive d'un potentiel.
- ☐ On ne ne peut rien conclure.

Question 6 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \log(1+x^4) - \log(16+x^4)$. Alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f a les propriétés suivantes:

- ☐ $\widehat{f}$ est paire et $\hat{f}(0) > 0$.
- ☐ $\widehat{f}$ est impaire et $\hat{f}(0) > 0$.
- ☐ $\widehat{f}$ est paire et $\hat{f}(0) < 0$.
- ☐ $\widehat{f}$ est impaire et $\hat{f}(0) < 0$.

Question 7 : En admettant que $|\cos(t)| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos(2k\,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4k^2-1)^2}$ vaut :

- ☐ $\dfrac{\pi^2}{8} + 1$
- ☐ $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{\pi^2}{8} - 1$

Question 8 : On considère la fonction

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^4\\ \theta &\longmapsto \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Alors, la longueur de la courbe $\Gamma = \gamma([0,4\pi])$ vaut :

- ☐ $2\pi\sqrt{5}$.
- ☐ 5π.
- ☐ $\dfrac{5\pi}{2}$.
- ☐ $\pi\sqrt{5}$.

Question 9 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$. En admettant que la transformée de Fourier de f est donnée par $\widehat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(\alpha^2 + 3|\alpha| + 3)e^{-|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{(1+x^2)^3}$ vaut :

- ☐ $\dfrac{3\pi}{16}$
- ☐ $\dfrac{3}{16}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- ☐ $\dfrac{3}{8}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- ☐ $\dfrac{3\pi}{8}$

Question 10 : Soit $f(x) = \cos(x)\sin(4x) + \cos(2x)$. Si $Ff(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\,n\,x}$ est la série de Fourier (en notation complexe) de f, alors:

- ☐ $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-4,-2,-1\}$
- ☐ $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-4,-2,-1,1,2,4\}$
- ☐ $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-5,-3,-2,2,3,5\}$
- ☐ $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1,2,4\}$

Deuxième partie, questions ouvertes

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Chaque résultat du cours utilisé doit être précisément énoncé.
- Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question 11 *(cette question est notée sur 5 points)* **:**

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Réservé au correcteur*

On considère le plan P d'équation $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\right\}$ et le cylindre (infini) C donné par

$$C = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), z) \mid \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $\Gamma = P \cap C$ la courbe à l'intersection de P et C. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma f\, d\ell$, où $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2}$.

Question 12 *(cette question est notée sur 4 points)* **:**

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 *Réservé au correcteur*

Soit F le champ vectoriel sur $\Omega = \mathbb{R}^3$ donné par

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(z^2+1)(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(z^2+1)(x^2+y^2)^2}, \frac{z}{(z^2+1)^2(x^2+y^2)} \right).$$

F dérive-t-il d'un potentiel ? Justifiez votre réponse en donnant un potentiel ou en démontrant qu'il n'en existe pas (énoncez les résultats théoriques utilisés).

Question 13 *(cette question est notée sur 10 points)* **:**

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Vérifier le théorème de Green pour le champ vectoriel $F(x, y) = (x - y, x + y)$ et le domaine

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2 + 1\right\}.$$

Question 14 *(cette question est notée sur 4 points)* **:**

0 1 2 3 4 *Réservé au correcteur*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le parallélépipède rectangle $\Omega = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ et $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel donné par

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x + y^2 + z^3}{3}, \frac{y + z^2 + x^3}{3}, \frac{z + x^2 + y^3}{3} \right).$$

Calculer

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds,$$

où ν est la normale unité extérieure à Ω.

Question 15 *(cette question est notée sur 12 points)* **:**

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	*Réservé au correcteur*
	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 10	☐ 11	☐ 12	

On fixe deux constantes réelles $r > 0$ et $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ et on considère le domaine hachuré L ci-dessous, intersection du cylindre de rayon r centré en 0 avec le plan incliné d'angle α par rapport au plan xy :

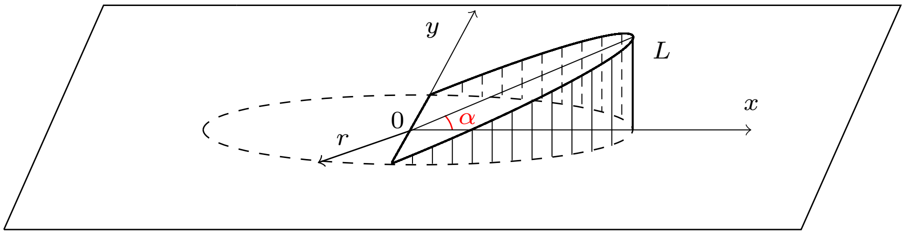

Figure 1: Domaine L.

(a) Montrer que

$$L = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2,\ 0 \le z \le \tan(\alpha)x\right\}.$$

(b) Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $F(x, y, z) = (-z, z, z)$ sur le domaine L.

Question 16 *(cette question est notée sur 14 points)* **:**

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 *Réservé au correcteur*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2-périodique telle que

$$f(x) = \sin|x| \qquad \text{pour tout } x \in [-1, 1]\,.$$

(a) Montrer que la série de Fourier de f est égale à

$$Ff(x) = 1 - \cos(1) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n\cos(1)}{\pi^2 n^2 - 1}\cos(\pi\, n\, x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Indication: On pourra utiliser les identités trigonométriques du formulaire en page 2.

(b) À l'aide d'un théorème de convergence des séries de Fourier (à énoncer), calculer la valeur des deux séries suivantes:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2 - 1}.$$

Indication: Résoudre un système d'équations à deux inconnues.

Question 17 *(cette question est notée sur 7 points)* :

0 1 2 3 4 5 6 7 *Réservé au correcteur*

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx < \infty.$$

Soit également la fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f'(x+1)$.

(a) Exprimer la transformée de Fourier de h en fonction de la transformée de Fourier de f.

(b) En déduire que si $f'(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.