

Exercice 4. (i) D_1 est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. On peut le paramétrer par $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,1-x]\}$.

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \sqrt{1-x-y} \, dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{1-x-y} \, dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{2}{3} (1-x-y)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x)^{3/2} \, dx = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5} (1-x)^{5/2} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

(ii) Pour paramétrer D_2 , nous utilisons les coordonnées polaires, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 2(1 + \cos \theta)]$. En effet, observer que

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta).$$

Rappelons que pour les coordonnées polaires, le jacobien est r .

$$\iint_{D_2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{3/4}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2(1+\cos \theta)} \frac{1}{r^{3/2}} r \, dr = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2(1+\cos \theta)} \, d\theta$$

en utilisant l'identité trigonométrique $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$, on trouve

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| \, d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) \, d\theta - 4 \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\theta/2) \, d\theta \\ &= 8 \sin(\theta/2) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} - 8 \sin(\theta/2) \Big|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 16. \end{aligned}$$

(iii) Finalement, $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1], y \in [0,1-x], z \in [0,1-y^2]\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_{D_3} z \, dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-y^2)^2 \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left((1-x) - \frac{2}{3} (1-x)^3 + \frac{1}{5} (1-x)^5 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (1-x)^2 + \frac{1}{6} (1-x)^4 - \frac{1}{30} (1-x)^6 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

Pour les deux domaines D_1 et D_2 , nous utilisons les coordonnées cylindriques $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, et $z = z$.

- (i) Le parabolôïde, obtenu par rotation autour de l'axe Oz de la courbe $z = r^2$, intersecte la sphère, obtenue par rotation autour de l'axe Oz de la courbe $r^2 + z^2 = 1$, lorsque $z^2 + z - 1 = 0$ et $z > 0$, donc en $z^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Le domaine $D_1 = P \cup B$ est donc constitué d'un morceau de parabolôïde et d'un morceau de boule

$$P = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, z^*], \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{z}] \right\},$$

$$B = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [z^*, 1], \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{1-z^2}] \right\}.$$

Son volume est donné par

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D_1) &= \text{Volume}(P) + \text{Volume}(B) = \iiint_P dx dy dz + \iiint_B dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} r dr + \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{z}{2} dz + 2\pi \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{5\pi}{12} (3 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

- (ii) Pour le domaine D_2 , la condition $x^2 + y^2 \leq 1$ se traduit en $0 \leq r \leq 1$. Les deux conditions $x \geq 0$ et $y \geq 0$ se traduisent en $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Les dernières conditions $z \geq 0$ et $x + y + z \leq \sqrt{2}$ deviennent $0 \leq z \leq \sqrt{2} - r \cos \theta - r \sin \theta$. Observons tout de même que pour tout $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la quantité $\sqrt{2} - r \cos \theta - r \sin \theta \geq 0$, avec égalité si et seulement si $r = 1$ et $\theta = \pi/4$. Ainsi,

$$D_2 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2], z \in [0, \sqrt{2} - r \cos \theta - r \sin \theta] \right\}.$$

Son volume est donné par

$$\begin{aligned} \text{Volume}(D_2) &= \iiint_{D_2} dx dy dz = \int_0^1 r dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}-r \cos \theta - r \sin \theta} dz \\ &= \int_0^1 r dr \int_0^{\pi/2} (\sqrt{2} - r \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^1 r \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - r - r \right) dr = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$