EPFL - automne 2024	Leonid Monin
Analyse III	**Exercices**
Série 1	12 septembre 2024

Remarque. Les théorèmes énoncés dans la présente série sont des rappels d'analyse II

Notations. Dans le cours et dans les exercices, nous n'utiliserons **pas** de notation spéciale pour les **vecteurs** (petites flèches ou écriture en gras). Soyez donc attentif à **la dimension de l'ensemble** auquel appartient un objet mathématique. De même, il n'y aura pas de notation spéciale pour le **vecteur nul**, qu'on notera toujours 0 (et pas $\vec{0}$ ou $\mathbf{0}$), et qui sera toujours clair dans le contexte.

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, des applications $F, G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F \cdot G) \;=\; \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot G + F \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i},$$

Exercice 2 (Voir aussi §8.5 du live *Analyse avancée pour ingénieurs*)**.**
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et une application $u = (u_1, \ldots, u_n) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
La **matrice Jacobienne** de u notée ∇u est la matrice de dimension $n \times n$ dont les composantes sont

$$(\nabla u)_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Le **jacobien** de u, noté $\operatorname{Jac} u(x)$ est défini par

$$\operatorname{Jac} u(x) = \det \nabla u(x)$$

Calculer le jacobien des applications suivantes :

(*i*) Les coordonnées polaires

$$u(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

(*ii*) Les coordonnées sphériques

$$u(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$

(*iii*) Les coordonnées cylindriques

$$u(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \sin\theta, z)$$

(iv) Les coordonnées cartésiennes.

$$u(x,y,z) = (x,y,z)$$

Théorème 1 (Formule de changement de variables/coordonnées)**.**
Soient des ouverts $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ continue et une application $u \in C^\infty(\Omega, \Omega')$ inversible, telle que $u^{-1} \in C^\infty(\Omega', \Omega)$.
Alors pour tout sous-ensemble $A \subset \Omega'$ fermé et borné,

$$\int_A f(y)dy = \int_{u^{-1}(A)} f(u(x))\, |\mathrm{Jac}\, u(x)|\, dx.$$

Exercice 3. Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x)dx$ dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ et } x-3 \leq y \leq 3-x\}$ et $f(x,y) = x^2 + \sin^3(y)$

(iii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ et $f(x,y) = y(1+x^2)$

(iv) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$ et $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

(v) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ et $f(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

Exercice 4. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(i) $f(x) = ||x||,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(ii) $g(x) = ||x||^k,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, où $k \geq 1$.

Théorème 2 (Dérivée de fonctions composées)**.**
Soient

- *les ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$;*
- *un champs scalaire $f = f(y) = f(y_1, \ldots, y_m) \in C^1(\Omega')$;*
- *un champs de vecteurs $g = g(x) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), ..., g_m(x_1, \ldots, x_n)) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que $g(\Omega) \subset \Omega'$.*

Alors, le produit de composition $f \circ g \in C^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x) \ = \ \nabla f(g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \ = \ \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Exercice 5. Soit une fonction $f = f(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C_1, et la fonction $g = g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(t, t^2, t + t^2).$$

(*i*) Calculer $g'(t)$.

(*ii*) Calculer $g'(t)$ dans le cas particulier $f(x) = ||x||^2$.

Exercice 6. Esquisser chacun des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivants (en posant quelques flêches sur des points autour de l'origine), et calculer leur divergence et rotationnel.

(*i*) $F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$,

(*ii*) $G(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$,

(*iii*) $H(x_1, x_2) = (1, 2)$,

(*iv*) $I(x_1, x_2) = (x_2, 0)$.