Montrer que

$$F = \operatorname{rot} \Phi \quad \textit{dans } \Omega.$$

Indication et remarque. *S'inspirer de l'exercice 3.2. On pourra remarquer qu'une façon plus ramassée d'écrire* Φ *est donnée par*

$$\Phi(x) = \int_0^1 [F(t\,x) \wedge x]\, t\, dt, \quad x \in \Omega$$

où on a dénoté le produit vectoriel par $\wedge$, *ce qui veut dire que si* $x, y \in \mathbb{R}^3$, *alors*

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Corrigés

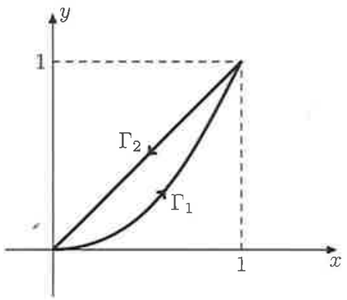
Exercice 3.1 *(i)* Comme

$$\operatorname{rot} F_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x\,y - x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) = y - 1 - 1 \neq 0,$$

le champ F_1 ne dérive pas d'un potentiel. On peut choisir $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$$\Gamma_1 = \left\{ \left(t, t^2\right) : t \in [0,1] \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \{(2-t,\ 2-t) : t \in [1,2]\}.$$

On trouve alors que



$$\begin{aligned} &\int_\Gamma F_1 \cdot dl \\ &= \int_{\Gamma_1} F_1 \cdot dl + \int_{\Gamma_2} F_1 \cdot dl \\ &= \int_0^1 \left(t^2, t^3 - t\right) \cdot (1, 2t)\, dt + \int_1^2 \left(2 - t, (2-t)^2 - (2-t)\right) \cdot (-1,-1)\, dt \end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Gamma F_1 \cdot dl = \frac{-4}{15} \neq 0.$$

(ii) Comme $\operatorname{rot} F_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2 y + 2\,x\right) = 3\,x^2 - 3\,x^2 = 0$ et que le domaine de définition de F_2 est $\mathbb{R}^2$, qui est convexe, on déduit que F_2 dérive d'un potentiel f. Ce potentiel satisfait donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 y + 2\,x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 \Rightarrow f(x,y) = x^3 y + h(x). \end{cases}$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à x et en la comparant à la première, on a

$$3\,x^2 y + h'(x) = 3\,x^2 y + 2\,x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2\,x \quad \Rightarrow \quad h(x) = x^2 + \text{constante}.$$

Donc le potentiel est $f(x,y) = x^3 y + x^2$+constante.

(iii) Comme

$$\operatorname{rot} F_3 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2 y\right) = 2\,x - 3\,x^2 \neq 0,$$

on trouve que F_3 ne dérive pas d'un potentiel. Choisissons $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ comme dans la question (i). On a

$$\int_\Gamma F_3 \cdot dl = \int_0^1 \left(3\,t^4, t^2\right) \cdot (1, 2\,t)\, dt + \int_1^2 \left(3\,(2-t)^3, (2-t)^2\right) \cdot (-1,-1)\, dt = \frac{1}{60}.$$

Exercice 3.2 *(i) Cas* $n = 2$. On commence par observer que

$$\frac{\partial}{\partial t}[t\, f(t\,x, t\,y)] = f(t\,x, t\,y) + t\left[x\, \frac{\partial f(t\,x, t\,y)}{\partial u} + y\, \frac{\partial f(t\,x, t\,y)}{\partial v}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[x\, f(t\,x, t\,y) + y\, g(t\,x, t\,y)] = f(t\,x, t\,y) + t\,x\, \frac{\partial f(t\,x, t\,y)}{\partial u} + t\,y\, \frac{\partial g(t\,x, t\,y)}{\partial u}.$$

Comme $\partial f / \partial v = \partial g / \partial u$ on déduit que ces deux quantités sont égales. En revenant à la définition

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 [x\, f(t\,x, t\,y) + y\, g(t\,x, t\,y)]\, dt$$

et en utilisant l'observation précédente on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[x\, f(t\,x, t\,y) + y\, g(t\,x, t\,y)]\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}[t\, f(t\,x, t\,y)]\, dt = t\, f(t\,x, t\,y)\big|_0^1 = f(x,y). \end{aligned}$$

Idem pour $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = g(x,y)$. Dans l'exemple on vérifie d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial y}(2\,x\,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y\right)$$

et on calcule ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \int_0^1 \left(2\,t^2 x\,y, t^2 x^2 + t\,y\right)\cdot(x,y)\,dt\\ &= \int_0^1 \left(3\,t^2 x^2 y + t\,y^2\right)dt = x^2 y + \frac{y^2}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Cas $n \geq 2$. Comme précédemment on observe que, pour tout $j = 1, \cdots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t\,F_j(t\,x)\right] = F_j(t\,x) + t\sum_{i=1}^n x_i\,\frac{\partial F_j}{\partial u_i}(t\,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^n x_i\,F_i(t\,x)\right] = F_j(t\,x) + t\sum_{i=1}^n x_i\,\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(t\,x).$$

Comme $\partial F_i/\partial u_j = \partial F_j/\partial u_i$ on trouve que ces deux quantités sont égales. De la définition

$$\varphi(x) = \int_0^1 F(t\,x)\cdot x\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i\,F_i(t\,x)\,dt$$

on obtient, en utilisant les identités précédentes, que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^n x_i\,F_i(t\,x)\right]dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[t\,F_j(t\,x)\right]dt\\ &= t\,F_j(t\,x)\big|_0^1 = F_j(x).\end{aligned}$$

Exercice 3.3 *(i)* On vérifie facilement que $\operatorname{rot} F = 0$. Si $F = \operatorname{grad} f$ on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x\,y + \frac{z}{1+x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2\,y\,z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + \operatorname{arctg} x$$

et donc, en intégrant la première équation par rapport à x, on trouve que

$$f(x,y,z) = x^2 y + z\ \operatorname{arctg} x + \varphi(y,z).$$

Dérivant f par rapport à y et z on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{arctg} x + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\,y\,z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2.$$

De la première de ces deux équations, en intégrant par rapport à y, on a que

$$\varphi(y,z) = y^2 z + \phi(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2 + \phi'(z)$$

et de la deuxième équation on obtient

$$[\phi'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(z) = c] \quad \Rightarrow \quad \varphi(y,z) = y^2 z + c.$$

On a finalement

$$f(x,y,z) = x^2 y + z\operatorname{arctg} x + y^2 z + c.$$

Exercice 3.4 On vérifie facilement que

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Essayons de trouver un potentiel. Rappelons que

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}.$$

Cas 1. Trouvons un potentiel dans $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$. On a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \alpha_+ \quad (\alpha_+ \in \mathbb{R}).$$

Cas 2. De même dans $\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\right\}$ on obtient que

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \alpha_- \quad (\alpha_- \in \mathbb{R}).$$

On a donc que le potentiel dans Ω, s'il existe, est donné par

$$f(x,y) = \begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \alpha_+ & \text{si } x > 0\\[2mm] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \alpha_- & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

Il reste à choisir α_+ et α_- pour que ce potentiel soit bien défini en $(0,y)$ avec $y < 0$. Pour cela on observe que

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x,y)\right] = -\frac{\pi}{2} + \alpha_+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-}\left[f(x,y)\right] = \frac{\pi}{2} + \alpha_-.$$

On doit donc choisir $\alpha_+ = \alpha_- + \pi$. On vérifie alors facilement que le potentiel f cherché sur Ω est bien

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \alpha_- + \pi & \text{si } x > 0 \\ \alpha_- + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \alpha_- & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 3.5 Une condition nécessaire est $\operatorname{rot} F = 0$ c'est-à-dire

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(\beta(r)\,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha(r)\,x) = y\,\beta'(r)\,\frac{x}{r} - x\,\alpha'(r)\,\frac{y}{r}.$$

Et donc on déduit qu'il faut nécessairement que $\beta'(r) = \alpha'(r)$ ce qui entraîne que $\beta(r) = \alpha(r) + \alpha_0$. En s'inspirant de l'exercice 3.2, on trouve qu'un candidat à être le potentiel est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 [F(t\,x, t\,y)\cdot(x,y)]\,dt = \int_0^1 (\alpha(t\,r)\,t\,x, \beta(t\,r)\,t\,y)\cdot(x,y)\,dt \\ &= \int_0^1 t\left[\alpha(t\,r)\,x^2 + \beta(t\,r)\,y^2\right]dt = \int_0^1 t\left[\alpha(t\,r)\,r^2 + \alpha_0\,y^2\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\alpha_0\,y^2 + \int_0^1 t\,r^2\alpha(t\,r)\,dt. \end{aligned}$$

En posant $t\,r = s$ ($ds = r\,dt$) on déduit que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\alpha_0\,y^2 + \int_0^r s\,\alpha(s)\,ds.$$

Comme $\lim\limits_{s\to 0}(s\,\alpha(s)) = 0$, l'intégrale est bien définie et donc f est candidat à être le potentiel. Pour en être sûr on vérifie que $f \in C^1(\Omega)$ et que $\operatorname{grad} f = F$.

Exercice 3.6 *(i)* Comme $F = \operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}[f(t,u(t))] = \frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t)) + u'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t,u(t)) \\ &= F_1(t,u(t)) + u'(t)\,F_2(t,u(t)). \end{aligned}$$

(ii) $F(x,y) = \left(\sin x, y^2\right)$ alors $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Comme F est définie sur tout $\mathbb{R}^2$ on peut trouver un potentiel

$$f(x,y) = -\cos x + \frac{y^3}{3}.$$

Donc une solution est donnée par ($c \in \mathbb{R}$ étant une constante)

$$\frac{1}{3}\,u^3(t) - \cos t = c.$$

Comme de plus $u(0) = 3$, on déduit que $c = 8$ et donc

$$u(t) = (3\cos t + 24)^{1/3}.$$

Exercice 3.7 *(i)* En procédant comme dans l'exercice précédent on constate que comme

$$W\,F = \operatorname{grad}\Phi,$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}[\Phi(t,u(t))] = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u'(t)\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = W\,F_1 + u'(t)\,W\,F_2 \\ &= W\,(F_1 + u'(t)\,F_2). \end{aligned}$$

Comme $W \neq 0$ on déduit que toute solution de $\Phi(t,u(t)) = c$ satisfait

$$F_1(t,u(t)) + u'(t)\,F_2(t,u(t)) = 0.$$

(ii) On pose

$$F(x,y) = \left(4\,x\sin(x\,y) + y\left(x^2+1\right)\cos(x\,y), \left(x^2+1\right)x\cos(x\,y)\right).$$

On ne peut pas appliquer l'exercice précédent car

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \neq 0.$$

Par contre si on considère

$$W\,F = \left(\left(x^2+1\right)\left[4\,x\sin(x\,y) + y\left(x^2+1\right)\cos(x\,y)\right], \left(x^2+1\right)^2 x\cos(x\,y)\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial(W\,F_2)}{\partial x} &= \frac{\partial(W\,F_1)}{\partial y} \\ &= \left(x^2+1\right)\left[\cos(x\,y) + 5\,x^2\cos(x\,y) - x\,y\sin(x\,y) - x^3 y\sin(x\,y)\right]. \end{aligned}$$

On trouve le potentiel

$$\Phi(x,y) = \left(x^2+1\right)^2\sin(x\,y).$$

On déduit qu'une solution est donnée, sous forme implicite, par

$$\left(t^2+1\right)^2\sin[t\,u(t)] = c = \text{constante}.$$

Exercice 3.8 *(i)* On pose $F = (\alpha, \beta)$ et on trouve

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -x\left[-2\,(2\,y)\left(x^2+y^2\right)^{-3}\right] = 4\,x\,y\left(x^2+y^2\right)^{-3}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -y\left[-2\,(2\,x)\left(x^2+y^2\right)^{-3}\right] = 4\,x\,y\left(x^2+y^2\right)^{-3}$$

d'où $\operatorname{rot} F = 0$. Le candidat à être un potentiel doit satisfaire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha\,(x,y) = -x\left(x^2+y^2\right)^{-2} \quad\Rightarrow\quad f = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}{2} + a\,(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \beta\,(x,y) = -y\left(x^2+y^2\right)^{-2} \Rightarrow\; a'\,(y) - \frac{2\,y}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-2} = -y\left(x^2+y^2\right)^{-2}.$$

Par conséquent le potentiel est donné par

$$f\,(x,y) = \frac{1}{2\,(x^2+y^2)} + \text{constante}$$

qui est un champ C^1 sur Ω.

(ii) On pose $G = (a, b)$ et on trouve

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 3y^2\left(x^2+y^2\right)^{-2} + y^3[-4\,y\left(x^2+y^2\right)^{-3}] = \left(x^2+y^2\right)^{-3}\left(3\,x^2y^2 - y^4\right)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -y^2\left(x^2+y^2\right)^{-2} - x\,y^2[-4\,x\left(x^2+y^2\right)^{-3}] = \left(x^2+y^2\right)^{-3}\left(3\,x^2y^2 - y^4\right)$$

et ainsi $\operatorname{rot} G = 0$. Toutefois, si on prend $\Gamma = \{(\cos t, \sin t)\,, t \in (0, 2\pi)\}$ on trouve

$$\int_\Gamma G \cdot dl = \int_0^{2\pi} \left(\sin^3 t, -\cos t \sin^2 t\right) \cdot \left(-\sin t, \cos t\right) dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -\pi \neq 0.$$

Donc ce champ ne dérive pas d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 3.9 * On note $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\Phi = \Phi\,(x) = \left(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3\right) \quad \text{et} \quad F = F\,(y) = \left(F^1, F^2, F^3\right).$$

On rappelle que

$$\Phi\,(x) = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 \left[F^2\,(t\,x)\,x_3 - F^3\,(t\,x)\,x_2\right] t\,dt \\ \displaystyle\int_0^1 \left[F^3\,(t\,x)\,x_1 - F^1\,(t\,x)\,x_3\right] t\,dt \\ \displaystyle\int_0^1 \left[F^1\,(t\,x)\,x_2 - F^2\,(t\,x)\,x_1\right] t\,dt \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{rot}\Phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^3_{x_2} - \Phi^2_{x_3} \\ \Phi^1_{x_3} - \Phi^3_{x_1} \\ \Phi^2_{x_1} - \Phi^1_{x_2} \end{pmatrix}.$$

On calcule la troisième composante de $\operatorname{rot}\Phi$

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3 &= \Phi^2_{x_1} - \Phi^1_{x_2} \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left[F^3\,(t\,x)\,x_1 - F^1\,(t\,x)\,x_3\right]\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[F^2\,(t\,x)\,x_3 - F^3\,(t\,x)\,x_2\right]\right] t\,dt\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3 = \int_0^1 &\left[t\,F^3_{y_1}\,(t\,x)\,x_1 + F^3\,(t\,x) - t\,F^1_{y_1}\,(t\,x)\,x_3\right. \\ &\left. - t\,F^2_{y_2}\,(t\,x)\,x_3 + t\,F^3_{y_2}\,(t\,x)\,x_2 + F^3\,(t\,x)\right] t\,dt\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3 = \int_0^1 &\left[2\,t\,F^3\,(t\,x) - t^2\left(F^1_{y_1}\,(t\,x) + F^2_{y_2}\,(t\,x)\right) x_3\right. \\ &\left. + t^2\left(F^3_{y_1}\,(t\,x)\,x_1 + F^3_{y_2}\,(t\,x)\,x_2\right)\right] dt.\end{aligned}$$

L'hypothèse $\operatorname{div} F = 0$ implique que

$$F^3_{y_3}\,(t\,x) = -\left(F^1_{y_1}\,(t\,x) + F^2_{y_2}\,(t\,x)\right)$$

et par conséquent

$$(\operatorname{rot}\Phi)^3 = \int_0^1 \left[2\,t\,F^3\,(t\,x) + t^2 F^3_{y_3}\,(t\,x)\,x_3 + t^2\left(F^3_{y_1}\,(t\,x)\,x_1 + F^3_{y_2}\,(t\,x)\,x_2\right)\right] dt$$

Ceci nous conduit finalement à (le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ est noté $\cdot$)

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3\,(x) &= \int_0^1 \left[2\,t\,F^3\,(t\,x) + t^2\left(\operatorname{grad} F^3\,(t\,x)\cdot x\right)\right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^2 F^3\,(t\,x)\right] dt = F^3\,(x).\end{aligned}$$

On montre de manière similaire que $(\operatorname{rot}\Phi)^1 = F^1$ et $(\operatorname{rot}\Phi)^2 = F^2$.