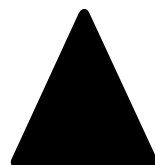




Ens. : S. Basterrechea
Analyse III -
16 janvier 2024
Durée : 180 minutes















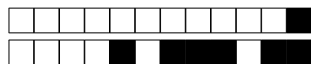
Hero of Time

SCIPER: 111298

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 23 questions pour un total de 70 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Aucun **document** n'est autorisé.
- Le formulaire des transformées de Fourier est fourni.
- L'utilisation de tout **outil électronique** (calculatrice, téléphone, montre connectée etc.) est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
 - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 points si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 points si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- De l'**espace de rédaction supplémentaire** se trouve en fin de dossier.
- Aucune **feuille supplémentaire** ne sera distribuée.
- Les **feuilles de brouillon** ne seront pas ramassées.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Formulaire de trigonométrie

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b),$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a).$$

Table des transformées de Fourier

	$f(y)$	$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(b \alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\omega > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega + i\alpha)}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\omega+i\alpha)b} - e^{-(\omega+i\alpha)c}}{(\omega + i\alpha)}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-i\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(\omega+\alpha)b} - e^{-i(\omega+\alpha)c}}{\omega + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + \omega^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{- \omega\alpha }}{ \omega }$
7	$f(y) = \frac{e^{- \omega y }}{ \omega } \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$
8	$f(y) = e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2} \omega } e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
9	$f(y) = ye^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2} \omega ^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(\omega^2 + y^2)^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{ \omega } - \alpha \right) e^{- \omega\alpha }$



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Énoncé

Soient les champs $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^2 .

Rappel : l'opérateur \cdot est le produit scalaire euclidien, tandis que \times est le produit vectoriel.

Question 1 (1 point) Laquelle des opérations suivantes est la seule à avoir un sens ?

☐ $\operatorname{div} f(x) \times \operatorname{rot} F(x)$

☒ $\operatorname{rot}(f(x)F(x)) + f(x) \operatorname{grad}(\operatorname{div} F(x))$

☐ $\Delta(\Delta f(x)F(x))$

☐ $\operatorname{div}(f(x)F(x)) + F(x)$

Solution. Nous procédons par élimination :

- $\operatorname{div} f(x) \times \operatorname{rot} F(x)$ n'a pas de sens, car la divergence donne un scalaire, qui ne va pas avec le produit vectoriel.
- $\Delta(\Delta f(x)F(x))$ n'a pas de sens, car le laplacien ne prend que des scalaires, or $\Delta f(x)F(x)$ est un vecteur.
- $\operatorname{div}(f(x)F(x)) + F(x)$ n'a pas de sens, car addition entre un scalaire (la divergence) et un vecteur ($F(x)$).
- $\operatorname{rot}(f(x)F(x)) + f(x) \operatorname{grad}(\operatorname{div} F(x))$ est un vecteur : le rotationnel prend le vecteur $f(x)F(x)$ pour donner un vecteur ; le gradient prend le scalaire $\operatorname{div} F(x)$ pour donner un vecteur, lui-même multiplié par le scalaire $f(x)$.

Question 2 (1 point) Développer l'expression $\operatorname{div}(f^2(x)F(x))$.

☐ $2\nabla f(x) \cdot F(x) + f^2(x) \operatorname{div} F(x)$

☐ Cette expression n'a pas de sens

☒ $f^2(x) \operatorname{div} F(x) + 2f(x) \nabla f(x) \cdot F(x)$

☐ $f^2(x) \operatorname{div} F(x) + \nabla^2 f(x) \cdot F(x)$

Solution. Nous pouvons appliquer la formule vue aux exercices (série 2, exo 4.(iii)) : avec $g(x) = f^2(x)$ et $\nabla g(x) = 2f(x) \nabla f(x)$, nous avons

$$\operatorname{div}(g(x)F(x)) = g(x) \operatorname{div}(F(x)) + \nabla g(x) \cdot F(x) = f^2(x) \operatorname{div}(F(x)) + 2f(x) \nabla f(x) \cdot F(x).$$

Alternativement, nous pouvons calculer explicitement avec la définition de la divergence : pour $i = 1, 2, 3$,

$$\partial_{x_i}(f^2(x)F_i(x)) = \partial_{x_i}(f^2(x))F_i(x) + f^2(x)\partial_{x_i}F_i(x) = 2f(x)\partial_{x_i}f(x)F_i(x) + f^2(x)\partial_{x_i}F_i(x)$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f^2(x)F(x)) &= \sum_{i=1}^3 (2f(x)\partial_{x_i}f(x)F_i(x) + f^2(x)\partial_{x_i}F_i(x)) \\ &= 2f(x) \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}f(x)F_i(x) + f^2(x) \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}F_i(x) \\ &= 2f(x) \nabla f(x) \cdot F(x) + f^2(x) \operatorname{div}(F(x)). \end{aligned}$$

Question 3 (1 point) Développer l'expression $\operatorname{rot} \nabla(f(F(x)))$

☐ $\nabla f(x) \cdot \operatorname{rot} F(x) + \operatorname{rot}(\nabla f(x)) \cdot F(x)$

☐ Cette expression n'a pas de sens

☐ $\Delta f(F(x)) \operatorname{rot}(F(x))$

☒ 0

Solution. La composition de fonction $f(F(x))$ est un champs scalaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} bien défini. Le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

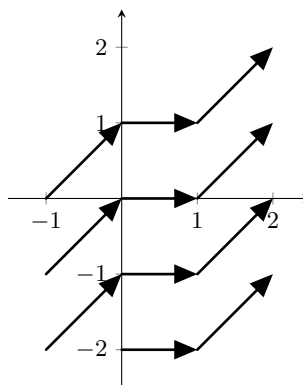
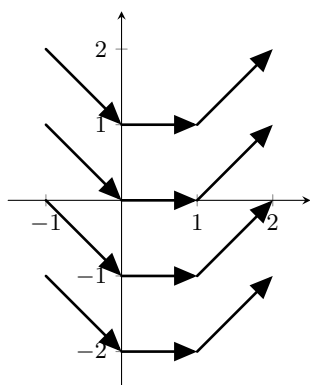
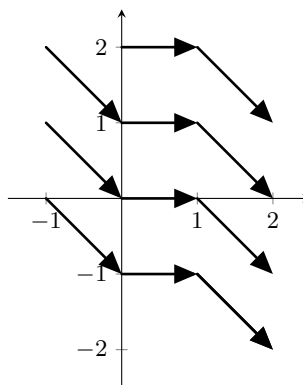
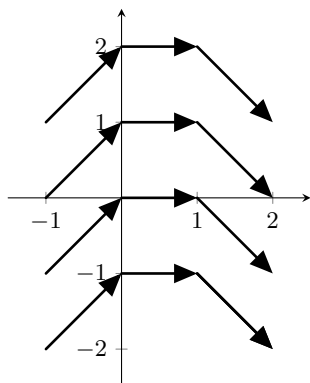


Enoncé

Soit les champs de vecteurs $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définis par

$$F(x, y) = (1, -x), \quad G(x, y) = (3y + xy^2, x^2y - x).$$

Question 4 (2 points) Lequel des graphiques suivants représente F ?



Solution. Il suffit de regarder les images $F(1, 0) = (1, -1)$ et $F(-1, 0) = (1, 1)$.

Question 5 (1 point) Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ $\int_{\Gamma} F \cdot dl = 0$ pour tout courbe régulière fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.
- ☐ $\text{rot } F = 0$
- ☒ Le domaine de définition de F est simplement connexe.
- ☐ F dérive d'un potentiel sur \mathbb{R}^2 .

Solution. Le domaine de définition de F est \mathbb{R}^2 qui est simplement connexe. Les autres affirmations sont fausses, car $\text{Rot}(F) = -1 \neq 0$.

Question 6 (3 points) Soit $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ le bord du triangle de sommets $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, -1)$. Calculer

$$\int_{\Gamma_2} G \cdot dl,$$

où Γ_2 est parcouru positivement.

- ☐ 0 ☐ 3 ☒ -6 ☐ -12

Solution. Nous pouvons calculer l'intégrale avec le théorème de Green. D'abord



$$\operatorname{rot} G(x, y) = -\partial_y(3y + xy^2) + \partial_x(x^2y - x) = -4.$$

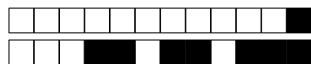
En posant Ω le triangle ouvert dont Γ_2 est le bord,

$$\int_{\Gamma_2} G \cdot dl = \int_{\Omega} \operatorname{rot} G \, dxdy = -4 \cdot \operatorname{Aire}(\Omega).$$

Nous calculons l'aire du triangle, qui est isocèle :

$$\operatorname{Aire}(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

L'intégrale vaut donc -6 .



Enoncé

Soient les sous-ensembles de \mathbb{R}^3

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \sin^2(z), 0 \leq z \leq \pi\}, \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2\},$$

$$E_3 = \{(x, y, 0) \in E_2\}, \quad E_4 = \{(x, y, z) \in E_2 : z < 0\}.$$

Question 7 (1 points) Quel type d'objet est E_1 ?

☐ L'ensemble vide

☒ Une surface régulière

☐ Un domaine régulier

☐ Une courbe régulière

Solution. E_1 est une surface régulière (le signe = est un bon indice) paramétrée par

$$\sigma(\theta, z) = (\sin(z) \cos(\theta), \sin(z) \sin(\theta), z) \quad \text{avec } (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Question 8 (1 point) Quel type d'objet est E_2 ?

☐ L'union de deux surfaces régulières

☒ L'union de deux courbes régulières

☐ L'union de deux domaines réguliers

☐ L'ensemble vide

Solution. E_2 est l'intersection entre une sphère de rayon 4 et un cône pointé sur l'origine ($r = z$). Cette intersection satisfait le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ |z| = 2 \end{cases}.$$

Autrement dit, E_2 est l'union de deux cercles de rayon $\sqrt{2}$, parallèles au plan Oxy et respectivement de hauteur $z = \sqrt{2}$ et $z = -\sqrt{2}$.

Question 9 (1 point) Quel type d'objet est E_3 ?

☐ Une courbe régulière

☒ L'ensemble vide

☐ Une surface régulière

☐ Un domaine régulier

Solution. Si $(x, y, 0) \in E_2$, alors on doit avoir simultanément $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 0$, ce qui est impossible, donc $E_3 = \emptyset$.

Question 10 (3 points) Soit $f(x, y, z) = x + y - z^3$. Calculer

$$\int_{E_4} f \, dl.$$

☒ 8π

☐ -16π

☐ Cette expression n'a pas de sens.

☐ $4\sqrt{2}\pi$

Solution. Par la question 8,

$$E_4 = (x, y, -\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2$$

qui est paramétré par $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos(t), \sqrt{2} \sin(t), -\sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi]$. L'intégrale demandée est

$$\begin{aligned} \int_{E_4} f \, dl &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} \cos(t) + \sqrt{2} \sin(t) - (-\sqrt{2})^3) \sqrt{2} \, dt \\ &= 0 + 0 + (\sqrt{2})^4 \int_0^{2\pi} dt \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$



Enoncé

Soient les domaines réguliers

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z, z < 1\}$$

et

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1, x > 0\}.$$

Question 11 (1 point) Le bord $\partial\Omega_1$ a deux parties :

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}.$$

Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☐ Si Γ_1 a une orientation opposée à celle de Γ_2 , alors $\partial\Omega_1$ est orientée positivement.
- ☐ Si Γ_1 est orientée négativement et Γ_2 est orientée positivement, alors $\partial\Omega_1$ est orientée négativement.
- ☒ Si Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées positivement, alors $\partial\Omega_1$ n'est orientée ni positivement, ni négativement.
- ☐ Si Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées négativement, alors $\partial\Omega_1$ est orientée positivement.

Solution. Γ_1 est le cercle intérieur et Γ_2 est le cercle extérieur. Si les deux sont orientées de la même façon, alors $\partial\Omega_1$ n'a pas d'orientation.

Question 12 (3 points) Le bord $\partial\Omega_2$ est composé de deux parties :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z \leq 1\} \text{ paramétrée par } \alpha(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r^2)$$

et

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z = 1\} \text{ paramétrée par } \beta(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1)$$

Considérons les normales associées $\alpha_r \times \alpha_\theta$ et $\beta_r \times \beta_\theta$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \times \beta_\theta$ est intérieure
- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ et $\beta_r \times \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.
- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ et $\beta_r \times \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.
- ☒ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ est intérieure et $\beta_r \times \beta_\theta$ est extérieure

Solution. $\partial\Omega_2$ est un paraboloïde dont le sommet est posé sur l'origine, et qui monte à la hauteur $z = 1$; Σ_1 est le bord latéral paraboloïde et Σ_2 est le "couvercle". Nous calculons les vecteurs normaux

$$\alpha_r \times \alpha_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2 \cos(\theta) \\ -2r^2 \sin(\theta) \\ r \end{pmatrix}.$$

En testant sur le point $(1, 0, 1) = \alpha(1, 0)$, nous avons $\alpha_r \times \alpha_\theta(1, 0) = (-2, -2, 1)$ qui pointe à l'intérieur. Similairement,

$$\beta_r \times \beta_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix},$$

qui pointe "vers le haut", donc à l'extérieur.

Question 13 (3 points) Calculer l'aire de Σ_1 .

Indication : $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

☒ Aire(Σ_1) = $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

☐ Aire(Σ_1) = 5π .

☐ Aire(Σ_1) = $5\sqrt{5}\pi$.

☐ Aire(Σ_1) = $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$.



Solution. Par ce qui précède,

$$\alpha_r \times \alpha_\theta = \begin{pmatrix} -2r^2 \cos(\theta) \\ -2r^2 \sin(\theta) \\ r \end{pmatrix} \implies \|\alpha_r \times \alpha_\theta\| = \sqrt{4r^4 \cos^2(\theta) + 4r^4 \sin^2(\theta) + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Pour calculer l'aire de Σ_1 , nous utilisons la formule

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\Sigma_1) &= \int_{\Sigma_1} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \|\alpha_r \times \alpha_\theta\| dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{4r^2 + 1} dr \\ (s = 4r^2 + 1) &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{s} ds \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} [s\sqrt{s}]_1^5 \\ &= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Question 14 (2 points) Soit le champs de vecteurs

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-1}{x^2 + y^2} \right).$$

Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☒ F dérive d'un potentiel sur Ω_3 .
- ☐ F ne dérive d'un potentiel nulle part dans \mathbb{R}^3 .
- ☐ F dérive d'un potentiel sur Ω_2
- ☐ F dérive d'un potentiel sur \mathbb{R}^3 .

Solution. Le champs F n'est pas défini sur l'axe $0z$, ce qui exclut automatiquement l'existence d'un potentiel sur \mathbb{R}^3 et Ω_2 (qui contient par exemple $(0, 0, 1/2)$). Pour montrer l'existence, il faut trouver explicitement un potentiel f par intégration. En commençant par la troisième composante (constante en z), nous trouvons facilement qu'il s'agit de

$$f(x, y, z) = \frac{-z}{x^2 + y^2}.$$



Enoncé

Soit $T > 0$, et la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{T}{2}[\\ -1 & \text{si } x \in [\frac{T}{2}, T[\end{cases}$$

étendue par T -périodicité à \mathbb{R} . Sa série de Fourier est donnée par

$$Ff(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2n+1)x\right).$$

Question 15 (1 point) Laquelle des égalités suivantes est **fausse** ?

$$\square \quad |Ff(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{kT}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\square \quad Ff\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

$$\square \quad Ff(x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \quad Ff(2T) = 1$$

Solution. La fonction f est régulière par morceaux, donc par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les seuls points de discontinuité sont les multiples de $T/2$, où la série converge vers 0. La réponse fausse est donc

$$''Ff(2T) = 1''.$$

Question 16 (3 points) Calculer

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^2.$$

$$\square \quad 3\pi^2/16$$

$$\square \quad \pi^2/8$$

$$\square \quad -\pi^2/8$$

$$\blacksquare \quad \pi^2/16$$

Solution. D'une part, en choisissant $x = T/4$, la série de Fourier donne la somme

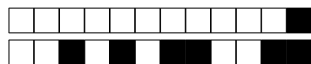
$$Ff(\pi/4) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} (-1)^n = 1 = f(\pi/4) \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} (-1)^n = \pi/4.$$

D'autre part, par l'identité de Parseval,

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{2}{T} \int_0^T f^2(x) dx = 2 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En combinant les deux sommes ci-dessus, nous obtenons

$$S = \frac{\pi^2}{8} - (\pi/4)^2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}.$$



Enoncé

Répondre aux questions suivantes à l'aide de la transformée de Fourier. On admettra que toutes les intégrales convergent et que la transformée est applicable.

Question 17 (1 point) Laquelle des intégrales suivantes n'est pas un nombre réel ?

☐ $\int_{-\infty}^{\infty} (1 - |x|)e^{-|x|+3ix} dx$

☒ $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{4}+3ix} dx$

☐ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}+3ix} dx$

☐ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{2}+3ix} dx$

Solution. Toutes ces intégrales sont de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{3ix} dx = \hat{f}(-3).$$

Si f est paire, alors $\hat{f}(-3)$ est un nombre réel, car

$$\begin{aligned} \hat{f}(-3) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(3x) + i \sin(3x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(3x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(3x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(3x) dx \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où la seconde intégrale (d'une fonction impaire) est nulle. Ainsi, la seule fonction non-paire parmi celles proposée est $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{4}}$, et l'intégrale associée est un nombre imaginaire.

Question 18 (2 points) L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2t^2} \sin(4t) dt$$

est égale à :

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}$

☐ 0

☐ $3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

☒ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2}$

Solution. Soit $f(t) = te^{-2t^2}$. Alors, sa transformée de Fourier est, par définition,

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2t^2} e^{-i\alpha t} dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2t^2} \sin(\alpha t) dt$$

car f est impaire. En particulier, si $\alpha = 4$, et avec la ligne 9 du formulaire ($\omega = \sqrt{2}$),

$$I = \frac{\sqrt{2\pi}}{-i} \hat{f}(4) = \frac{\sqrt{2\pi}}{-i} \cdot \frac{-4i}{2\sqrt{2}(\sqrt{2})^3} e^{-\frac{4^2}{4 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2}.$$

Question 19 (2 points) L'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(t/4)}{t^2} dt$$

est égale à :

☒ $\frac{\pi}{4}$

☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2}$

☐ $\sin\left(\frac{2}{\pi}\right)e^{-1/2}$

☐ Cette intégrale est divergente

Solution. Nous appliquons l'identité de Plancherel sur les fonctions de la ligne 1 du formulaire ($b = 1/4$) :

Question 18 (2 points) L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-2t^2} \sin(4t) dt$$

est égale à :

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3/2}$

☐ 0

☐ $3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

☒ $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2}$

We can notice that $f(t) = t e^{-2t^2}$ is an odd function as $f(t) = -f(-t)$. Then the Fourier transform in sines of f (section 2.3.6 of Fourier transform chapter) is:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) &= -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\alpha t) dt \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\alpha t) dt\end{aligned}$$

That evaluated at $\alpha=4$ is

$$\hat{f}(4) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(4t) dt = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I \quad (*)$$

Using the Fourier transforms table (row 9, $\omega = \sqrt{2}$)

we get

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}(\sqrt{2})^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4 \cdot 2}} = \frac{-i\alpha}{8} e^{-\frac{\alpha^2}{8}}$$

that evaluated at $\alpha=4$ is

$$\hat{f}(4) = \frac{-i \cdot 4}{8} e^{-2} = -i \frac{1}{2} e^{-2}$$

and using (*)

$$\hat{f}(4) = -i \frac{1}{2} e^{-2} = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I \rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2}$$



$$J = \int_{-1/4}^{1/4} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Question 20 (2 points) Soit une solution $u \in C^3(\mathbb{R})$ intégrable de l'équation différentielle

$$4u'''(x) - xu(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si \hat{u} dénote la transformée de Fourier de u et C est une constante réelle arbitraire, alors

☒ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{-\alpha^4}$

☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{-i\alpha^4}$

☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{\alpha^4}$

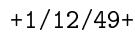
☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{i\alpha^4}$

Solution. En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés de l'équation différentielle,

$$\mathcal{F}(4u''' - xu)(\alpha) = 4(i\alpha)^3 \hat{u}(\alpha) - i\hat{u}'(\alpha) = 0 \implies \hat{u}'(\alpha) + 4\alpha \hat{u}(\alpha) = 0.$$

Cette équation linéaire du 1er ordre se résoud par la méthode de séparation des variables :

$$\frac{\hat{u}'(\alpha)}{\hat{u}(\alpha)} = -4\alpha^3 \implies \hat{u}(\alpha) = Ce^{\int -4\alpha^3 d\alpha} = Ce^{-\alpha^4}.$$



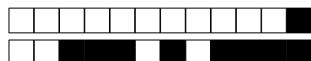
$$\gamma_1(r) = (r, 1 - r^2, 0), \quad \gamma_2(\theta) = (\cos(\theta), 0, \sin(\theta)), \quad \gamma_3(r) = (0, 1 - r^2, r),$$



nous calculons trois intégrales, sans oublier de changer le signe de la troisième, pour préserver l'orientation positive de ∂A :

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} F \cdot dl &= \int_0^1 F(\gamma_1(r)) \cdot \gamma_1'(r) dr + \int_0^{\pi/2} F(\gamma_2(\theta)) \cdot \gamma_2'(\theta) d\theta - \int_0^1 F(\gamma_3(r)) \cdot \gamma_3'(r) dr \\
 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2r \\ 0 \end{pmatrix} dr + \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta - \int_0^1 \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2r \\ 1 \end{pmatrix} dr \\
 &= \int_0^1 -2r^2 dr + \int_0^{\pi/2} (\sin^2(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)) d\theta - \int_0^1 r dr \\
 &= -\frac{2}{3} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

On a donc bien vérifié le théorème de Stokes.



Question 22: Cette question est notée sur 11 points.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique, de période $T = 2\pi$ telle que

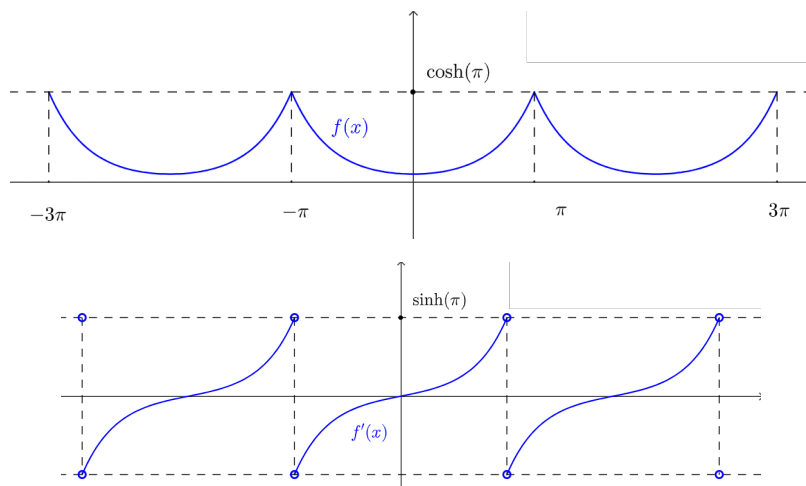
$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in]-\pi, \pi].$$

- (a) La fonction f est-elle régulière par morceaux ? Justifier votre réponse.
 (b) Calculer la série de Fourier Ff en coefficients réels.
 (c) A l'aide de ce qui précède et de résultats du cours (en vérifiant bien les hypothèses), calculer les séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Solution

- (a) Nous pouvons voir graphiquement que f et f' sont continues par morceaux (f est même continue) :



- (b) La fonction f est paire, donc $b_n = 0$ pour tout n .
 Nous calculons a_n pour tout $n \geq 0$ (le cas $n = 0$ ne posera pas de problème) :

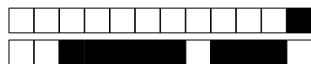
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left([\sinh(x) \cos(nx)]_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} \sinh(x) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\sinh(\pi) \cos(n\pi) + n [\cosh(x) \sin(nx)]_0^{\pi} - n^2 \int_0^{\pi} \cosh(x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2 \sinh(\pi) (-1)^n}{\pi} - n^2 a_n \\ &= \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

On en déduit la série de Fourier

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos(nx) \right).$$

- (c) Puisque f est régulière par morceaux et continue, alors par le théorème de Dirichlet,

$$Ff(x) = f(x) = \cosh(x), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$



En particulier, si $x = 0$, alors

$$\begin{aligned}
 Ff(0) = f(0) &\implies \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right) = \cosh(0) = 1 \\
 &\implies \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2 \sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Nous obtenons l'autre somme avec $x = \pi$:

$$\begin{aligned}
 Ff(\pi) = f(\pi) &\implies \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{1+n^2} \right) = \cosh(\pi) \\
 &\implies \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh(\pi)}{2 \sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$



Question 23: Cette question est notée sur 9 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☒ 9

- (a) Soit $\omega > 0$. Vérifier que la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-\omega|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

est bien définie, puis la calculer explicitement (sans utiliser la table des transformées).

- (b) En utilisant les propriétés et tables de la transformée de Fourier, trouvez une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation

$$y(x) + 2y''(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y''''(t) - 4y''(t) + 4y(t)) e^{-\sqrt{2}|x-t|} dt = 5e^{-5x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solution.

- (a) Nous vérifions d'abord que f est intégrable :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|x|} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\omega x} dx = \frac{-2}{\omega} [e^{-\omega x}]_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{\omega} (1 - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\omega x}) = \frac{2}{\omega} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

où on a utilisé $\omega > 0$ pour avoir la convergence de la limite. La fonction admet donc bien une transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|x|} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\omega-i\alpha)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\omega+i\alpha)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\omega-i\alpha} [e^{(\omega-i\alpha)x}]_{-\infty}^0 - \frac{1}{\omega+i\alpha} [e^{-(\omega+i\alpha)x}]_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\omega-i\alpha)x}}{\omega-i\alpha} + \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(\omega+i\alpha)x}}{\omega+i\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\omega-i\alpha} + \frac{1}{\omega+i\alpha} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Les limites des exponentielles sont nulles car $\omega > 0$ et (pour la première)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |e^{(\omega-i\alpha)x}| = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\omega x} = 0.$$

- (b) Posons $f(x) = e^{-\sqrt{2}|x|}$, sa transformée de Fourier $\hat{f}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2 + \alpha^2}$ et $g(x) = 5e^{-5x^2}$. L'équation devient

$$y(x) + 2y''(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} [(y'''' - 4y'' + 4y) * f](x) = g(x).$$

En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés de l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\alpha) &= \mathcal{F} \left(y + 2y'' + \frac{1}{\sqrt{2}} (y'''' - 4y'' + 4y) * f \right) (\alpha) \\ &= \hat{y}(\alpha) + 2(i\alpha)^2 \hat{y}(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot [(i\alpha)^4 - 4(i\alpha)^2 + 4] \cdot \hat{y}(\alpha) \cdot \hat{f}(\alpha) \\ &= \hat{y}(\alpha)(1 - 2\alpha^2) + \hat{y}(\alpha)(\alpha^4 + 4\alpha^2 + 4) \frac{2}{2 + \alpha^2} \\ &= \hat{y}(\alpha)(1 - 2\alpha^2) + \hat{y}(\alpha)(4 + 2\alpha^2) \\ &= 5\hat{y}(\alpha) \end{aligned}$$

D'où

$$\hat{y}(\alpha) = \frac{1}{5} \mathcal{F}(g)(\alpha) \implies y(x) = \frac{1}{5} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(x) = \frac{1}{5} g(x) = e^{-5x^2}.$$