Ens: Prof. M. Picasso - Analyse III - XYZ

18 janvier 2016 - durée : 2 heures et 15 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

1

Lennon John

SCIPER : **XXXXX1** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

Posez votre carte d'étudiant sur la table.

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.

Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :

- $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
- 0 point si vous ne cochez rien,
- $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- $+1$ point si vous cochez la réponse correcte,
- 0 point si vous ne cochez rien,
- -1 point si vous cochez la réponse incorrecte.

Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 1 : Soit $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$. Que vaut $\text{Rés}_0(f)$?

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ -1

Question 2 : Soit $\Sigma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ orienté de sorte que la normale unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ soit dirigée vers l'extérieur de Σ. Soit $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$. On a $\displaystyle\iint_\Sigma f\, \nu_3 \,\mathrm{d}s$

- ☐ $= -\dfrac{4\pi}{3}$
- ☐ $= \dfrac{2\pi}{3}$
- ☐ $= \dfrac{4\pi}{3}$
- ☐ $= -\dfrac{2\pi}{3}$

Question 3 : Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$. Que vaut $\int_\gamma \frac{\cos(z + e^z + 1) + 2z^2 + z^3}{z^2(z-3)} \, \mathrm{d}z$?

- ☐ $2\pi i \frac{2\cos(2) - \sin(3)}{9}$
- ☐ $2\pi i \frac{6\sin(2) - \cos(2)}{9}$
- ☐ $2\pi i \frac{9\sin(3) + \sin(2)}{9}$

Question 4 : Soit $\Sigma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq x_1 \leq 1, \ 0 \leq x_2 \leq 1, \ x_3 = 0\right\}$ orienté de sorte que la normale unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ soit telle que $\nu_3 > 0$. Soit $\partial\Sigma$ le bord de Σ et soit $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$. On a $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

- ☐ $= 1$
- ☐ $= 0$
- ☐ $= -1$

Question 5 : Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$. Pour quelles fonctions f ci-dessous a-t-on

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \;?$$

☐ $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$

☐ $f(z) = \dfrac{1}{z}$

☐ $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, cochez (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou cochez la case FAUX si l'affirmation **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle peut être fausse).

Question 6 : Soit $\Sigma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 = 0\right\}$ orienté de sorte que la normale unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ soit telle que $\nu_3 > 0$. Soit $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (f(x_1, x_2, x_3), 0, 0)$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire C^1. On a :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 7 : Soit $u(x_1, x_2, x_3, t)$ un champ scalaire C^2 tel que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, t) - \operatorname{div}\Big((2 + \sin x_1)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u(x_1, x_2, x_3, t)\Big) = 1,$$

pour tout $x_1, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}$. Ici on a noté $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u$ le vecteur de composantes $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de bord une surface fermée $\partial\Omega$ de normale unité extérieure $\vec{\nu}$. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\Omega u\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iint_{\partial\Omega}(2 + \sin x_1)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u \cdot \vec{\nu}\,\mathrm{d}s + \iiint_\Omega \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et soit

$$\Gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_3 = 0\right\}.$$

On a $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions à rédiger

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur. Cette partie comporte les questions **A** et **B**.

Question A : *Cette question est notée sur 6 points.*

Réservé au correcteur

Soit $\Omega = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 4(x_1^2 + x_2^2) \leq x_3^2,\ 0 \leq x_3 \leq 2\big\}$ et soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \big(x_1^2, x_2^2, x_3^3\big)$. Représenter Ω, la normale extérieure unité $\vec{\nu}$ du bord $\partial\Omega$, et vérifier le théorème de la divergence.

Rappel: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = 0.$

Question B : *Cette question est notée sur 4 points.*

Réservé au correcteur

Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

On admettra que pour $0 \leq t \leq \pi$ on a $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r}{\left|1+(re^{it}-1)^2\right|} = 0.$