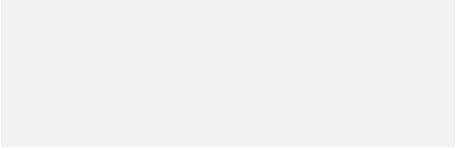




1

Lennon John

SCIPER: XXXXX1

Signature: 

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

Posez votre carte d'étudiant sur la table.

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.

Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :

+1/ N points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
0 point si vous ne cochez rien,
-1/ M point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

+1 point si vous cochez la réponse correcte,
0 point si vous ne cochez rien,
-1 point si vous cochez la réponse incorrecte.

Utilisez un **stylo** à encre **noire** ou **bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

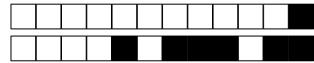
Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses**:

 oui | ja | sì | yes



 non | nein | non | no



**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Question 1 : Soit $f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$. Que vaut $\text{Rés}_0(f)$?

- 1
- 0
- 1



Question 2 : Soit $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ orienté de sorte que la normale unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ soit dirigée vers l'extérieur de Σ . Soit $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$. On a $\iint_{\Sigma} f \nu_3 \, ds$

$$\square = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\square = \frac{2\pi}{3}$$

$$\square = \frac{4\pi}{3}$$

$$\square = -\frac{2\pi}{3}$$



Question 3 : Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$. Que vaut $\int_{\gamma} \frac{\cos(z + e^z + 1) + 2z^2 + z^3}{z^2(z - 3)} dz$?

- $2\pi i \frac{2 \cos(2) - \sin(3)}{9}$
- $2\pi i \frac{6 \sin(2) - \cos(2)}{9}$
- $2\pi i \frac{9 \sin(3) + \sin(2)}{9}$



Question 4 : Soit $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$ orienté de sorte que la normale unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ soit telle que $\nu_3 > 0$. Soit $\partial\Sigma$ le bord de Σ et soit $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$. On a $\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$\boxed{} = 1$$

$$\boxed{} = 0$$

$$\boxed{} = -1$$



Question 5 : Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$. Pour quelles fonctions f ci-dessous a-t-on

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 ?$$

- $f(z) = \frac{1}{z-2}$
- $f(z) = \frac{1}{z}$
- $f(z) = \frac{1}{z^2}$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, cochez (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou cochez la case FAUX si l'affirmation **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle peut être fausse).

Question 6 : Soit $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\}$ orienté de sorte que la normale unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ soit telle que $\nu_3 > 0$. Soit $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (f(x_1, x_2, x_3), 0, 0)$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ scalaire C^1 . On a :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) dr d\theta.$$

VRAI FAUX



Question 7 : Soit $u(x_1, x_2, x_3, t)$ un champ scalaire C^2 tel que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, t) - \operatorname{div} \left((2 + \sin x_1) \overrightarrow{\operatorname{grad}} u(x_1, x_2, x_3, t) \right) = 1,$$

pour tout $x_1, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}$. Ici on a noté $\overrightarrow{\operatorname{grad}} u$ le vecteur de composantes $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de bord une surface fermée $\partial\Omega$ de normale unité extérieure $\vec{\nu}$. On a

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} u \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iint_{\partial\Omega} (2 + \sin x_1) \overrightarrow{\operatorname{grad}} u \cdot \vec{\nu} \, ds + \iiint_{\Omega} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

VRAI FAUX

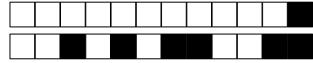


Question 8 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 et soit

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

On a $\int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = 0$.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions à rédiger

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur. Cette partie comporte les questions **A** et **B**.

Question A : *Cette question est notée sur 6 points.*

 Réservé au correcteur

Soit $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; 4(x_1^2 + x_2^2) \leq x_3^2, 0 \leq x_3 \leq 2\}$ et soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^3)$. Représenter Ω , la normale extérieure unité $\vec{\nu}$ du bord $\partial\Omega$, et vérifier le théorème de la divergence.

Rappel: $\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = 0.$



Question B : Cette question est notée sur 4 points.



Réserve au correcteur

Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + (x-1)^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1 + (x-1)^2} dx.$$

On admettra que pour $0 \leq t \leq \pi$ on a $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{|1 + (re^{it} - 1)^2|} = 0$.