



+1/1/60+

Ens: Prof. M. Picasso - Analyse III - XYZ

18 janvier 2016 - durée : 2 heures et 15 minutes

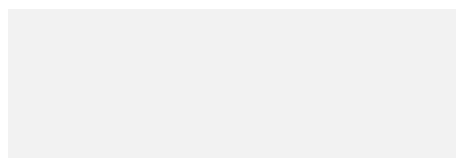


# 1

## Lennon John

SCIPER: **XXXXX1**

Signature:



Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

Posez votre carte d'étudiant sur la table.

**Aucun** document n'est autorisé.

L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.

Pour les questions à **choix multiple** il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera :


- +1/ $N$  points si vous cochez une réponse correcte, où  $N$  est le nombre de réponses correctes,
- 0 point si vous ne cochez rien,
- 1/ $M$  point si vous cochez une réponse incorrecte, où  $M$  est le nombre de réponses incorrectes.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si vous cochez la réponse correcte,
- 0 point si vous ne cochez rien,
- 1 point si vous cochez la réponse incorrecte.

Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

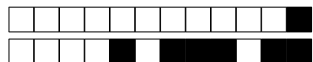
Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

 oui | ja | sì | yes



non | nein | non | no





### Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

**Question 1 :** Soit  $f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$ . Que vaut  $\text{Rés}_0(f)$ ?

☐ 1

☐ 0

☐ -1



**Question 2 :** Soit  $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  orienté de sorte que la normale unité  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  soit dirigée vers l'extérieur de  $\Sigma$ . Soit  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$ . On a  $\iint_{\Sigma} f \nu_3 \, ds$

$$\square = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\square = \frac{2\pi}{3}$$

$$\square = \frac{4\pi}{3}$$

$$\square = -\frac{2\pi}{3}$$



**Question 3 :** Soit  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ . Que vaut  $\int_{\gamma} \frac{\cos(z + e^z + 1) + 2z^2 + z^3}{z^2(z-3)} dz$  ?

☐  $2\pi i \frac{2 \cos(2) - \sin(3)}{9}$

☐  $2\pi i \frac{6 \sin(2) - \cos(2)}{9}$

☐  $2\pi i \frac{9 \sin(3) + \sin(2)}{9}$

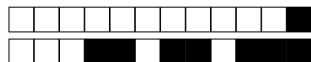


**Question 4 :** Soit  $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$  orienté de sorte que la normale unité  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  soit telle que  $\nu_3 > 0$ . Soit  $\partial\Sigma$  le bord de  $\Sigma$  et soit  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ . On a  $\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

☐ = 1

☐ = 0

☐ = -1



**Question 5 :** Soit  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ . Pour quelles fonctions  $f$  ci-dessous a-t-on

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 ?$$

☐  $f(z) = \frac{1}{z-2}$

☐  $f(z) = \frac{1}{z}$

☐  $f(z) = \frac{1}{z^2}$



## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, cochez (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou cochez la case FAUX si l'affirmation **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle peut être fausse).

**Question 6 :** Soit  $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\}$  orienté de sorte que la normale unité  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  soit telle que  $\nu_3 > 0$ . Soit  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (f(x_1, x_2, x_3), 0, 0)$  où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est un champ scalaire  $C^1$ . On a :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) dr d\theta.$$

☐ VRAI      ☐ FAUX



**Question 7 :** Soit  $u(x_1, x_2, x_3, t)$  un champ scalaire  $C^2$  tel que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, t) - \operatorname{div} \left( (2 + \sin x_1) \overrightarrow{\operatorname{grad}} u(x_1, x_2, x_3, t) \right) = 1,$$

pour tout  $x_1, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}$ . Ici on a noté  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} u$  le vecteur de composantes  $\left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$ . Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de bord une surface fermée  $\partial\Omega$  de normale unité extérieure  $\vec{\nu}$ . On a

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} u \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iint_{\partial\Omega} (2 + \sin x_1) \overrightarrow{\operatorname{grad}} u \cdot \vec{\nu} \, ds + \iiint_{\Omega} dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

☐ VRAI      ☐ FAUX





**Question 8 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  et soit

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

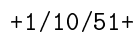
On a  $\int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = 0$ .

☐

VRAI

☐

FAUX





**Question B :** *Cette question est notée sur 4 points.*

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

*Réservé au correcteur*

Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+(x-1)^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+(x-1)^2} dx.$$

On admettra que pour  $0 \leq t \leq \pi$  on a  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{|1+(re^{it}-1)^2|} = 0$ .

